$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1+\ln(t)}{t\ln(t)}\, dt \qquad \text{notons } h(t) = \frac{1+\ln(t)}{t\ln(t)}$$

h est continue sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$

ainsi f sera définie $\begin{cases} \text{soit seulement sur }]0;1[\\ \text{soit seulement sur }]1;+\infty[\end{cases}$

<u>prenons le cas : f définie sur $]1;+\infty[$</u>

procédons à un changement de variable, posons $u = \ln(t)$

ainsi $du = \dfrac{dt}{t}$ et les bornes deviennent $\begin{cases} \text{si } t = x & u = \ln(x) \\ \text{si } t = x^2 & u = \ln(x^2) = \\ & = 2\ln(x) \end{cases}$

$$f(x) = \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{1+u}{u}\, du = \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{du}{u} + \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} du$$

$$f(x) = \Big[\ln(|u|)\Big]_{\ln(x)}^{2\ln(x)} + \Big[u\Big]_{\ln(x)}^{2\ln(x)} = \ln(2\ln(x)) - \ln(\ln(x)) + 2\ln(x) - \ln(x)$$

car $\ln(x) > 0$ puisque $x > 1$

$$f(x) = \ln(2) + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(x)) + 2\ln(x) - \ln(x)$$

$$f(x) = \ln(2) + \ln(x) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f(x) = \ln(2x)}$$

<u>prenons le cas f définie sur $]0;1[$</u>

procédons au même changement de variable que précédement et nous arrivons à

$$f(x) = \Big[\ln(|u|)\Big]_{\ln(x)}^{2\ln(x)} + \Big[u\Big]_{\ln(x)}^{2\ln(x)}$$

et comme $x \in]0;1[$ $\ln(x) < 0$ et $|u| = -\ln(x) > 0$

ainsi $f(x) = \Big[\ln(-2\ln(x)) - \ln(-\ln(x))\Big] + 2\ln(x) - \ln(x)$

$$f(x) = \ln(2) + \ln(-\ln(x)) - \ln(-\ln(x)) + \ln(x)$$

$$f(x) = \ln(2) + \ln(x)$$

$$\boxed{f(x) = \ln(2x)}$$

Si on définit $f(1) = \ln(2)$ alors on peut définir par continuité la fonction f au pt 1

car $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x>1 \\ x\to 1}} f(x)$ puisque $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} \ln(2x) = \lim\limits_{\substack{x>1 \\ x\to 1}} \ln(2x) = \ln(2)$