$I=\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2+2x-8}\,dx$ notons $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+2x-8}$

x^2+2x-8 a pour racines x_1 et x_2 tel que $\begin{cases} x_1 = \frac{-2-\sqrt{\Delta}}{2} \\ x_2 = \frac{-2+\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$

avec $\Delta = b^2-4ac = 4+4\cdot 8 = 36$

Ainsi $\begin{cases} x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4 \\ x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2 \end{cases}$

Ainsi $x^2+2x-8 = (x-2)(x+4)$

Par conséquent nous pouvons décomposer $f(x)$ en somme de fonctions rationnelles: $f(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}$ cherchons A, B

$$f(x) = \frac{A(x+4)+B(x-2)}{(x-2)(x+4)} = \frac{Ax+Bx+4A-2B}{(x-2)(x+4)} = \frac{x\,(A+B)x+(4A-2B)}{(x-2)(x+4)}$$

~~et identifions~~ procédons par identification

$(A+B)x+(4A-2B) = 2x-1$ ainsi $\begin{cases} A+B=2 \\ 4A-2B=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2A+2B=4 \\ 4A-2B=-1 \end{cases}$

d'où $6A=3$

soit $A=\frac{1}{2}$

et $B=\frac{3}{2}$

d'où $f(x) = \frac{1}{2(x-2)} + \frac{3}{2(x+4)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+4}\right]$

$$I = \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2+2x-8}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+4}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{dx}{x-2} + \int_0^1 \frac{3\,dx}{x+4}\right)$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\left[\ln|x-2|\right]_0^1 + \left[3\ln|x+4|\right]_0^1\right)$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\left(\ln|-1| - \ln|-2|\right) + \left(3\ln(5) - 3\ln(4)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1) - \ln(2) + 3\ln(5) - 3\ln(4)\right)$$

$$I = \frac{1}{2}\left(3\ln(5) - 6\ln(2) - \ln(2)\right) = \frac{1}{2}\left(3\ln(5) - 7\ln(2)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5^3}{2^7}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{5^3}{2^7}}\right)$$

$$I = \ln \frac{5}{2^3}\times\sqrt{\frac{5}{2}} = \ln\left(\frac{5}{8}\times\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \approx -0{,}0118583$$