$J = \int_1^e \ln^3(x)\,dx$ $\qquad \left(\ln^3(x)\right)$ est continue sur $\left[1\,;\,e\right]$

procédons une intégration par partie. $\int u'v\,dx = uv - \int v'u\,dx$

ou $\int u'v = uv - \int v'u$

posons $\begin{cases} u' = 1 & u = x \\ v = \ln^3 x & v' = 3\ln^2(x) \times \frac{1}{x} \end{cases}$

ainsi $I = \left[x\ln^3 x\right]_1^e - \int_1^e \frac{3}{x}\ln^2(x) \times x\,dx$

$I = (e) - \int_1^e 3\ln^2(x)\,dx$. notons $I_1 = \int_1^e 3\ln^2(x)\,dx$

$I_1 = \int^e 3\ln^2(x)\,dx$

procédons encore une ~~deux~~ième intégration par partie $\int u'v = uv - \int v'u$

ainsi $I_1 = \int_1^e 3\ln^2(x)\,dx$.

posons $\begin{cases} u' = 3 & u = 3x \\ v = \ln^2(x) & v' = 2\ln(x) \times \frac{1}{x} \end{cases}$

$I_1 = \left[3x\ln^2(x)\right]_1^e - \int_1^e 6\frac{x}{x}\ln(x)\,dx$

$I_1 = (3e) - \int_1^e 6\ln(x)\,dx$. notons $I_2 = \int_1^e 6\ln(x)\,dx$

procédons encore une troisième intégration par partie $\int u'v = uv - \int v'u$

ainsi $I_2 = \int_1^e 6\ln(x)\,dx$ $\quad$ posons $\begin{cases} u' = 6 & u = 6x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{cases}$

$I_2 = \left[6x\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e 6\,dx$.

$I_2 = 6e - \left[6x\right]_1^e = 6e - 6e + 6 = 6$

en résumé $\quad I = e - I_1 = e - (3e) + I_2 = -2e + 6 = 6 - 2e \simeq 0{,}563436$