Soit M l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta, 2\alpha+\beta)\}$

$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta, 2\alpha+\beta)$ est l'équation paramétrée de M avec comme paramètre α et β. On peut aussi l'écrire

$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = \alpha+\beta & (1) \\ y = \alpha-\beta & (2) \\ z = 2\alpha+\beta & (3) \end{cases}$ on peut essayer de trouver une ou des relations directement entre x, y, z.

En combinant les égalités (1) et (2) : (1) + (2) on obtient $x + y = 2\alpha$
(1) − (2) on obtient $x - y = 2\beta$

et en substituant α et β dans l'égalité (3) nous obtenons : $z = (x+y) + \frac{(x-y)}{2}$ soit $2z = 3x + y$

ainsi : nous pouvons définir la partie M de $\mathbb{R}^3$ de la manière suivante.

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ 3x + y - 2z = 0_{\mathbb{R}}\}$$

Avec cette définition de M on peut vérifier avec les méthodes habituelles que M est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

1) M est par sa définition une partie de $\mathbb{R}^3$
2) M n'est pas vide, en effet le vecteur $0_{\mathbb{R}^3}$ appartient à M
3) M est stable par combinaison linéaire.
soit u un élément quelconque de M $u = (x_1, y_1, z_1)$
soit v un élément quelconque de M $v = (x_2, y_2, z_2)$
soit λ et μ deux nombres réels quelconques
Vérifions que ~~....~~ la combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ est encore un élément de M

$\lambda u + \mu v = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) = (X, Y, Z)$

Calculons $3X + Y - 2Z$.

$3X + Y - 2Z = 3(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) - 2(\lambda z_1 + \mu z_2)$: opération dans $\mathbb{R}$

$= \lambda(3x_1 + y_1 - 2z_1) + \mu(3x_2 + y_2 - 2z_2)$

$= \lambda \times 0_{\mathbb{R}} + \mu \times 0_{\mathbb{R}}$ car $u \in M$ et $v \in M$

ainsi $3X + Y - 2Z = 0_{\mathbb{R}}$ ce qui signifie que la combinaison linéaire $\lambda u + \mu v \in M$