1/4

On considère les sous ensembles $D = \{x \in \mathbb{R}^3 ; x_1 + x_2 + x_3 = 0_{\mathbb{R}}\}$ et $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^3 ; x_1 = x_2 = x_3\}$ en notant $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

1/ Montrer que $D$ et $\Delta$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

2/ Montrer que $D \cap \Delta = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

3/ Soit $x$ un élément de $\mathbb{R}^3$, chercher $x'$ qui soit un élément de $D$ et $x''$ qui soit élément de $\Delta$ tel que $x = x' + x''$ avec $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, $x'' = (x''_1, x''_2, x''_3)$

4/ En déduire que $\mathbb{R}^3 = D \oplus \Delta$

---

1) D est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Pour cela il nous faut montrer :

i) $D$ est non vide

ii) $D$ est une partie de $\mathbb{R}^3$

iii) $D$ est stable pour la combinaison linéaire

i/ D est non vide en effet $x = (-1, 1, 0)$ est un élément de $D$. immédiat

ii/ D est une partie de $\mathbb{R}^3$ : immédiat car $D$ est par sa construction une partie de $\mathbb{R}^3$

iii/ D est stable pour les combinaisons linéaires de ses éléments

c'est à dire ($\alpha$) soit $x \in D$ et $y \in D$ alors $x + y \in D$

($\beta$) soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in D$ alors $\lambda x \in D$

$\alpha$) notons $\left.\begin{array}{l} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{array}\right\}$ alors $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

Vérifions que $x + y \in D$, c'est-à-dire vérifions que $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0_{\mathbb{R}}$

Pour cela calculons

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) \quad \text{opération ds } \mathbb{R}$$

$$= 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}} \quad \text{car } x \in D \text{ et } y \in D$$

$$= 0_{\mathbb{R}}$$

ainsi $x + y \in D$

De même, de manière analogue $\lambda . x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ et vérifions

$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda . 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$ d'où ...

En résumé : $D$ non vide, partie de $\mathbb{R}^3$ et stable pour la combinaison linéaire alors $D$ est s.e.v de $\mathbb{R}^3$

1 b) d'une manière analogue on démontre que $\Delta$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

i/ $\Delta$ est non vide $x = (1,1,1)$ est un élement de $\Delta$

ii/ $\Delta$ partie de $\mathbb{R}^3$ par sa construction.

iii/ $\Delta$ stable pour la combinaison linéaire de ses éléments

$x \in \Delta \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

($\alpha$) soit $x \in \Delta$ et $y \in \Delta$ alors $x + y \in \Delta$

($\beta$) soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \Delta$ alors $\lambda x \in \Delta$

pour ($\alpha$) calculons $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

Verifions $\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_2 + y_2 = x_3 + y_3 \end{cases}$ c'est immédiat car $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

alors $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

et $\begin{cases} x_2 = x_3 \\ y_2 = y_3 \end{cases}$ implique $x_2 + y_2 = x_3 + y_3$

pour ($\beta$) Calculons $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

et comme $x_1 = x_2$ alors $\lambda x_1 = \lambda x_2$ d'où $\lambda x_1 = \lambda x_2 = \lambda x_3$

et comme $x_2 = x_3$ alors $\lambda x_2 = \lambda x_3$

Ainsi c'est la stabilité de $\Delta$ pour la combinaison linéaire

En conclusion $D$ et $\Delta$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

2/ Montrons que $D \cap \Delta = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}$

cherchons un élément $x$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $x \in D \cap \Delta$ soit $\begin{cases} x \in D \\ \text{et } x \in \Delta \end{cases}$

soit $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0_{\mathbb{R}} & \text{car } x \in D \\ \left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{array}\right\} & \text{car } x \in \Delta \end{cases}$ alors $x_1 + x_1 + x_1 = 0_{\mathbb{R}}$

soit $3x_1 = 0_{\mathbb{R}}$ par conséquent $x_1 = 0_{\mathbb{R}}$

d'où nécessairement $x_1 = 0_{\mathbb{R}}$, $x_2 = 0_{\mathbb{R}}$, $x_3 = 0_{\mathbb{R}}$

soit si $x \in D \cap \Delta$ alors $x = (0, 0, 0)$

3/ soit $x$ un élement de $\mathbb{R}^3$

cherchons un $x'$ element de $D$ et $x''$ element de $\Delta$

tel que $x = x' + x''$

<u>Analyse</u> : si $x'$ et $x''$ existe ils sont tels que $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ et $x'' = (x''_1, x''_2, x''_3)$

$$\text{avec} \begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0_{\mathbb{R}} & \text{car } x' \in D \\ \left.\begin{array}{l} x''_1 = x''_2 \\ x''_2 = x''_3 \end{array}\right\} & \text{car } x'' \in \Delta \\ \text{et } \left.\begin{array}{l} x_1 = x'_1 + x''_1 \\ x_2 = x'_2 + x''_2 \\ x_3 = x'_3 + x''_3 \end{array}\right\} & \text{car } x = x' + x'' \end{cases}$$

on a 6 inconnues $x'_1, x'_2, x'_3, x''_1, x''_2, x''_3$ et nous avons 6 equations

Ces 6 équations peut se réduire à ces 3 équation.

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0_{\mathbb{R}} \\ x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 \\ x_2 - x'_2 = x_3 - x'_3 \end{cases}$$

avec 3 inconnues $(x'_1, x'_2, x'_3$

vu que $\begin{cases} x''_1 = x_1 - x'_1 \\ x''_2 = x_2 - x'_2 \\ x''_3 = x_3 - x'_3 \end{cases}$

En mettant toutes les inconnus à gauche de l'égalité

on obtient le système à 3 inconnus et à 3 équation :

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0 \\ -x'_1 + x'_2 = -x_1 + x_2 \\ -x'_2 + x'_3 = -x_2 + x_3 \end{cases}$$

Utilisons la méthode de pivot.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & +1 & -x_2 + x_3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2 + L_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & +1 & -x_2 + x_3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 2L_3 + L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 3 & -2x_2 + 2x_3 - x_1 + x_2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0 \\ 2x'_2 + x'_3 = -x_1 + x_2 \\ 3x'_3 = -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0 \\ 2x'_2 + x'_3 = -x_1 + x_2 \\ x'_3 = -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} + \frac{2}{3}x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0 \\ x'_2 = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{6} - \frac{x_3}{3} \\ x'_3 = -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} + \frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0 \\ x'_2 = -\frac{2x_1}{6} + \frac{4x_2}{6} - \frac{x_3}{3} \\ x'_3 = -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} + \frac{2}{3}x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_1 = -x'_2 - x'_3 \\ x'_2 = -\frac{x_1}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{x_3}{3} \\ x'_3 = -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} + \frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

Ainsi $\begin{cases} x'_1 = \frac{2x_1}{3} - \frac{x_2}{3} - \frac{x_3}{3} \\ x'_2 = -\frac{x_1}{3} + \frac{2}{3}x_2 - \frac{x_3}{3} \\ x'_3 = -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} + \frac{2}{3}x_3 \end{cases}$ et $\begin{cases} x''_1 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} \\ x''_2 = +\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} \\ x''_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} \end{cases}$

Verifions (1) $x'_1 + x'_2 + x'_3 = 0_{\mathbb{R}}$. c'est immediat. (faire le calcul) : $x' \in D$

(2) $\left.\begin{matrix} x''_1 = x''_2 \\ x''_2 = x''_3 \end{matrix}\right\}$ c'est immediat aussi. Il suffit de voir : $x'' \in \Delta$

(3) $x' + x'' = \begin{cases} \frac{2x_1}{3} - \frac{x_2}{3} - \frac{x_3}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} = x_1 \\ -\frac{x_1}{3} + \frac{2x_2}{3} - \frac{x_3}{3} + \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} = x_2 \\ -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} + \frac{2}{3}x_3 + \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} = x_3 \end{cases}$

d'où $x' + x'' = x$.

4/ Ainsi, En conclusion

- Comme $D \cap \Delta = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
- Comme ~~tout~~ pour tout element $x$ de $\mathbb{R}^3$ on a trouvé $x' \in D$ et $x'' \in \Delta$ tel que $x = x' + x''$
- Comme $D$ et $\Delta$ sont deux sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Alors $\mathbb{R}^3 = D \oplus \Delta$, $D$ et $\Delta$ sont 2 s.espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$