• Feuille 2

Exercice 4

Enoncé :

Pour fêter la fin de l'année (déjà), vous faites un repas au restaurant avec vos amis (n personnes en tout). A la fin du repas, quelqu'un propose le jeu suivant : chacun mise un euro, choisit pile ou face, et inscrit son choix sur un papier qu'il cache. Personne ne peut voir les choix des convives. Puis on lance une pièce équilibrée, et on retourne les papiers : ceux qui ont choisi la bonne face se partage les n euros. S'il n'y a pas de gagnant, les n euros sont donnés comme pourboire au serveur du restaurant.

1. On note X_i^n la v.a.r égale au gain du $i^{\text{ème}}$ joueur. Donner la loi de probabilité de X_i^n et montrer que :

$$E(X_i^n) = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^k}{k+1}$$

puis montrer, de deux façons différentes que

$$E(X_i^n) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

2. Un nouvel ami arrive. Acceptez-vous qu'il participe au jeu ? Qu'en pense le serveur du restaurant ?

Pour approcher le phénomène, procédons à partir d'un exemple. Etudions le cas où il y a 3 personnes. Soit $n=3$.

<u>notons</u> X_1^3 le gain de la 1ère personne

X_2^3 le gain de la 2ème personne

X_3^3 le gain de la 3e personne.

<u>remarquons</u> que l'événement "une personne gagne" correspond à l'évenement : "il avait écrit la face qui est sortie" ce qui correspond à l'événement "il y a coincidence entre ce qu'il avait écrit et ce qui est sorti"

<u>Ainsi</u> la probabilité pour qu'une personne gagne est egale à la probabilité qu'il y ait coincidence entre ce qu'il avait écrit et ce qui est sorti. et ici cette probabilité est egale à $\frac{1}{2}$ car il y a une possibilité sur un total de 2 pour que ce qu'il a écrit sort et surtout car la pièce est équilibrée.

<u>Observons les possibilités de</u> ce que la 1ère personne peut gagner

- la 1ère personne gagne et il y a 2 autres gagnants : alors le gain de la 1ère pers : $\frac{3}{3}$ €
- la 1ère pers gagne et il y a 1 autre gagnant : son gain : $\frac{3}{2}$ €
- la 1ère pers gagne et il y a 0 autres gagnants : son gain $\frac{3}{1}$ €
- la 1ère pers ne gagne pas et il y a 0 autres gagnant son gain 0 €
- la 1ère pers ne gagne pas et il y a 1 autre gagnant son gain 0 €
- la 1ère person ne gagne pas et il y a 2 gagnants son gain sera 0 €

Ainsi $X_1^3 \in \left\{\frac{3}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, 0\right\}$ et on procède de même pour X_i^3 : $X_i^3 \in \left\{\frac{3}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, 0\right\}$

<u>Calculons les probabilités</u> $Prob(X_1^3 = g)$

$$Prob\left(X_1^3 = \frac{3}{3}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{} \times \underbrace{C_2^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0}_{}$$

$$= Prob(1^{ère} \text{ personne gagne}) \times Prob(2 \text{ autres personnes gagnent})$$

$$\text{Prob}\left(X_1^3 = \frac{3}{2}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{} \times \underbrace{C_2^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1}_{}$$

$= \text{Prob}\left(1^{\text{ère}} \text{ personne gagne}\right) \times \text{Prob}\left(1 \text{ autre pers gagne parmi les 2 autres}\right)$

$$\text{Prob}\left(X_1^3 = \frac{3}{1}\right) = \frac{1}{2} \times C_2^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{Prob}\left(X_1^3 = 0\right) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{} \times \left[C_2^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_2^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0\right]$$

Prob de non coïncidence pour la 1ère personne
Prob pour qu'elle perde

<u>alors</u> $E\left(X_1^3\right) = \frac{3}{3} \times \frac{1}{2} C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{3}{1} \times \frac{1}{2} \times C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$+ 0 \times \frac{1}{2} \times \left[C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots\right]$$

$$E\left(X_1^3\right) = 3 \times \frac{1}{2^3} \times \left[\frac{1}{3} \times C_2^2 + \frac{1}{2} \times C_2^1 + \frac{1}{1} \times C_2^0\right]$$

$$E\left(X_1^3\right) = \frac{3}{2^3} \times \sum_{k=0}^{2} \frac{C_2^k}{k+1}$$ et on procède de m̂ pour $E\left(X_i^3\right)$ $i \in \{1,2,3\}$

<u>Cas pour n personnes</u> : gain de la $i^{\text{ème}}$ personne (X_i^n).
En procédant d'une manière analogue que pour $n = 3$
nous avons ; $X_i^n \in \left\{\frac{n}{n}, \frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2}, \dots, \frac{n}{2}, n, 0\right\}$

$$\text{Prob}\left(X_i^n = \frac{n}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \underbrace{C_{n-1}^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)-(k-1)}}_{}$$

les k gagnants

la $i^{\text{ème}}$ personne gagne

(k-1) autres personnes ont gagné

Ainsi $\text{Prob}\left(X_i^n = \frac{n}{k}\right) = \frac{1}{2^n} \times C_{n-1}^{k-1}$

$$\text{Prob}\left(X_i^n = 0\right) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{Prob de non coincidence} \\ \text{pour la } i^{\text{ème}} \text{ personne}}} \times \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}$$

Calcul de $E(X_i^n)$

$$E(X_i^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} \times \text{Prob}\left(X_i^n = \frac{n}{k}\right) + 0 \times \text{Prob}\left(X_i^n = 0\right)$$

$$E(X_i^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} \times \frac{1}{2^n} \times C_{n-1}^{k-1} = \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{k-1}}{k}$$

$$E(X_i^n) = \frac{n}{2^n} \sum_{h=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^{h}}{h+1} = \frac{n}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^{k}}{k+1}$$

changement d'indice de sommation : on pose $k = h+1$
soit $h = k-1$
avec $1 \leq k \leq n$
alors $0 \leq h \leq n-1$

$$\boxed{E(X_i^n) = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^{k}}{k+1}}$$

à partir de $E(X_i^n) = \frac{n}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^k}{k+1}$

Montrons que $E(X_i^n) = 1 - \frac{1}{2^n}$

Rappelons d'abord que $2^n = (1+1)^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l \, 1^l \cdot 1^{n-l} = \sum_{l=0}^{n} C_n^l$

en effet : $(a+b)^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l a^l b^{n-l}$

donc $\boxed{2^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l}$

partons de $\frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^k}{k+1} = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \times \frac{1}{(k+1)}$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!\, n}{k!(k+1)(n-1-k)!} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k+1} = \frac{1}{2^n} \sum_{h=1}^{n} C_n^h$$

en faisant un changement d'indice de sommation

$$\begin{cases} h = k+1 \\ 0 \leq k \leq n-1 \\ 1 \leq h \leq n \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2^n} \left[\left(\sum_{h=0}^{n} C_n^h \right) - C_n^0 \right] = \frac{1}{2^n} \left[2^n - 1 \right] = 1 - \frac{1}{2^n}$$

d'où $E(X_i^n) = 1 - \frac{1}{2^n}$. On remarque que si $n \nearrow$: $2^n \nearrow$ $\left(\frac{1}{2^n}\right) \searrow$ $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \nearrow$

donc $E(X_i^n) \nearrow$

2ème manière

(point de vue du serveur)

notons S la variable aléatoire égale au gain du serveur.

$S \in \{0, n\}$ en effet soit il ne gagne rien car c'est partagée entre les gagnants soit il gagne toute la mise à savoir n euros dès que personne ne gagne

l'évenement "$S = n$" correspond à l'évènement

"toutes les personnes ont écrit F alors que P est sorti"

ou "touts les personnes ont ecrit P alors que F est sorti"

$$\text{"}S=n\text{"} \iff \left(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \dots \cap F_n \cap P\right) \cup \left(P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n \cap F\right)$$

où F_i est ce que la personne i a écrit
ou P_i ~~[illegible]~~ s'il a écrit Face c'est F_i
s'il a écrit Pile c'est P_i

et F ou P c'est ce qui est sorti.

$$\text{Ainsi } \text{Prob}(S=n) = \Pr\left[\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i \cap P\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i \cap F\right)\right]$$

$$\text{Soit } \text{Prob}(S=n) = \Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} F_i \,/\, P\right] \times \Pr(P) + \Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} P_i \,/\, F\right] \times \Pr(F)$$

$$\text{Prob}(S=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Bigg\} \boxed{E(S) = n \times \frac{1}{2^n}}$$

$$\text{Ainsi } \text{Prob}(S=0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Par ailleurs on sait que $S + \sum_{i=1}^{n} X_i^n = n$ d'où $E\left(S + \sum_{i=1}^{n} X_i^n\right) = n$

soit $E(S) + \sum_{i=1}^{n} E(X_i^n) = n$ soit $E(S) + n\,E(X_i^n) = n \iff n\frac{1}{2^n} + n\,E(X_i^n) = n$

d'où $E(X_i^n) = 1 - 1/2^n$