Sciences Eco Probabilité
TD3 exo 10

$\uparrow 1/2$

X v.a , X = montant des deductions d'une déclaration choisie au hasard

X en milliers d'euros

f densité de X $\qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^\alpha} & \text{si } x \geq 5 \\ 0 & \text{si } x < 5 \end{cases}$

1.a Conditions que doivent vérifier α

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_5^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{doit être convergente, car } f(x) = 0 \text{ si } x < 5$$

or pour être convergente il est nécessaire que $\int_5^{\infty} \frac{k}{x^\alpha}\,dx$

converge c'est à dire il faut que $\alpha > 1$

1.b Calcul de k

$$\int_5^{\infty} \frac{k}{x^\alpha}\,dx = 1 \iff k = \frac{1}{\int_5^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx} = \frac{1}{\int_5^{\infty} x^{-\alpha}\,dx} = \frac{1}{\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_5^{\infty}}$$

ainsi : $k = \dfrac{\alpha - 1}{5^{1-\alpha}}$ $\qquad$ soit $k = (\alpha - 1)\, 5^{\alpha - 1}$

2 Fonction de repartition de X

Par définition $F(x) = \text{Prob}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_5^{x} f(t)\,dt$

soit $\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 5 \\ F(x) = \int_5^x \frac{k}{t^\alpha}\,dt = k\int_5^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = k \times \int_5^x t^{-\alpha}\,dt = k \times \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_5^x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

soit $x \geq 5$ $\quad F(x) = k \times \dfrac{x^{(-\alpha+1)} - 5^{(-\alpha+1)}}{(-\alpha+1)} =$

si $x \geq 5$, $\quad F(x) = (\alpha - 1) \cdot 5^{\alpha - 1} \cdot \dfrac{1}{(1-\alpha)} \times (x^{1-\alpha} - 5^{1-\alpha}) = 1 - \left(\dfrac{x}{5}\right)^{1-\alpha}$

Conclusion Fonction de repartition de X

$$F(x) \begin{cases} = 0 & \text{si } x < 5 \\ = 1 - \left(\frac{x}{5}\right)^{1-\alpha} & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Sciences Eco Proba
TD3 exo 10

3. <u>loi suivie par</u> Y, $Y = \ln\left(\frac{X}{5}\right)$ $X \geq 0$

Calculons la fonction de répartition de Y, $G(y)$

$$G(y) = \text{Prob}(\cancel{X}\, Y \leq y) \quad (\text{définition})$$

$$= \text{Prob}\left(\ln\left(\frac{X}{5}\right) \leq y\right)$$

$$= \text{Prob}\left(\frac{X}{5} \leq e^y\right)$$ car fonct° ln est croissant et

$$= \text{Prob}\left(X \leq 5e^y\right)$$

$$G(y) = F\left(5e^y\right) \qquad y \geq 0$$

$$G(y) = 1 - \left(\frac{5e^y}{5}\right)^{1-\alpha}$$

$$G(y) = 1 - \left(e^y\right)^{1-\alpha} = 1 - e^{(1-\alpha)y}$$

$$G(y) = 1 - e^{-(\alpha-1)y}$$

fonction de densité $G'(y) = g(y) = (\alpha - 1)e^{-(\alpha-1)y}$

si $y > 0$. $g(y) = (\alpha - 1)e^{-(\alpha-1)y}$ et $g(y) = 0$ si $y < 0$

Ainsi Y suit loi exponentielle de paramètre $\alpha - 1$

$$Y \sim \mathcal{E}(\alpha - 1)$$