Sciences Eco 2°A 2009-2010

TD3 exo 11

L est une v.a, L est la côté d'une plaque de céramique de forme carrée.

La densité de la v.a L est $f_L(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in]0;1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Soit S la variable aléatoire ~~surf~~ aire de la plaque carrée.

$S = L \times L = L^2$

Cherchons la fonction densité de S.

la fonction de répartition de S sera notée G, celle de L est F

$G(s) = \text{Prob}(S \leq s)$ par définition

remarquons que si $L \in]0;1[$ alors $S \in]0;1[$

vu que $S = L^2$ et $0 < L < 1$ alors $0 < L^2 < 1$.

Ainsi $G(s) = \text{Prob}(L^2 \leq s) = \text{Prob}(L \leq \sqrt{s})$ vu que la fonction racine carrée est une fonction croissante et $s \in]0;1[$

d'où $G(s) = F(\sqrt{s})$

par conséquent $g(s) = G'(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \times (F(\sqrt{s}))' = \frac{1}{2\sqrt{s}} \times f(\sqrt{s})$

$$\begin{cases} g(s) = 0 & \text{si } s \notin]0;1[\\ g(s) = \frac{6\sqrt{s}(1-\sqrt{s})}{2\sqrt{s}} & \text{si } s \in]0;1[\end{cases}$$

en conclusion : $\begin{cases} g(s) = 3(1-\sqrt{s}) & \text{si } s \in]0;1[\\ g(s) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

<u>Espérance de S</u> : $E(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} s.g(s)ds = \int_0^1 s.g(s)\,ds = 3\int_0^1 s - s^{3/2}\,ds$

$E(S) = 3\left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^{5/2}}{5} \times 2\right]_0^1 = 3 \times \left(\frac{5}{10} - \frac{4}{10}\right) = \frac{3}{10}$ ainsi $E(S) = \frac{3}{10}$