Interrogation (2)

I/ $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

afin que $\{u, v, w\}$ forme une famille orthogonale il faut que les 3 produits scalaires $u.v$; $u.w$ et $v.w$ soient tous les 3 egaux à $0_{\mathbb{R}}$.

soit $u.v = 0_{\mathbb{R}}$, $u.w = 0_{\mathbb{R}}$ et $v.w = 0_{\mathbb{R}}$

rappelons que si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $u' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $u.u' = xx' + yy' + zz'$

Calculons ~~Posons~~ $u.v = 0_{\mathbb{R}} \iff 1.1 + 1.1 + 1.(-2) = 0_{\mathbb{R}}$ l'orthogonalité est vérifiée.

Calculons $u.w = 0_{\mathbb{R}} \iff 1 + 1.y + 1.z = 0_{\mathbb{R}}$

Calculs $v.w = 0_{\mathbb{R}} \iff 1 + 1.y - 2.z = 0_{\mathbb{R}}$

Ainsi il faut : $\begin{cases} y + z = -1 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$ d'où $3z = 0$ en combinant $L_1 + L_2$

soit $z = 0$ et par conséquent $y = -1$

Par conséquent si $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $\{u, v, w\}$ est une famille orthogonale.

II/ Une famille de vecteurs orthonormaux $\{u', v', w'\}$ est une famille telle que $u'.v' = 0_{\mathbb{R}}$; $u'.w' = 0_{\mathbb{R}}$; $v'.w' = 0_{\mathbb{R}}$ (Produit scalaire nul)

et tel que $\|u'\| = \|v'\| = \|w'\|$

Autrement dit : $\{u', v', w'\}$ est une famille orthogonale et ces 3 vecteurs ont la même norme.

si $u' = \dfrac{u}{\|u\|}$, $v' = \dfrac{v}{\|v\|}$, $w' = \dfrac{w}{\|w\|}$ où $\{u, v, w\}$ est une déjà famille orthogonale, et où $\|u'\| = 1 = \|v'\| = \|w'\|$

.../...

en effet: $\|u'\| = \left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1$ de même $\|v'\| = 1$, $\|w'\| = 1$

et $u' \cdot v' = \frac{u}{\|u\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{1}{\|u\|} \times \frac{1}{\|v\|}\right) \times (u \cdot v) = \frac{1}{\|u\|} \cdot \frac{1}{\|v\|} \times 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$

de même pour $u' \cdot w' = 0_{\mathbb{R}}$ et $v' \cdot w' = 0_{\mathbb{R}}$

d'où la famille $\{u', v', w'\}$ est orthonormale.

notons que $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ch'na : $\|u\| = \sqrt{1 + 1.1 + 1.1} = \sqrt{3}$

par conséquent $u' = \frac{u}{\sqrt{3}}$ soit $u' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

de m̂ $\|v\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ soit $v' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} ; \frac{1}{\sqrt{6}} ; \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

de m̂ $\|w\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$ soit $w' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}} ; 0\right)$

III

On a dans $\mathbb{R}^3$: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

si $t = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Si t s'écrit de deux manières differentes comme combinaison linéaire de la famille $\{u, v, w\}$ alors on trouverait trois reels α, β, γ tel que $t = \alpha u + \beta v + \gamma w$ et on trouverait trois autres reels α', β', γ' tel que $t = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w$. Par conséquent $\alpha u + \beta v + \gamma w = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w$. autrement dit : $(\alpha - \alpha')u + (\beta - \beta')v + (\gamma - \gamma')w = 0_{\mathbb{R}}$

<u>Or</u> <u>si</u> la famille $\{u, v, w\}$ est telle que si pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (3 nombres reels quelconques) l'égalité $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$ implique nécessairement que $\lambda_1 = 0_{\mathbb{R}}$; $\lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}$ et $\lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$

<u>alors</u> nécéssairement $\alpha' - \alpha = 0_{\mathbb{R}}$, $\beta' - \beta = 0_{\mathbb{R}}$, $\gamma' - \gamma = 0_{\mathbb{R}}$

autrement dit $\alpha' = \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' = \gamma$ et par conséquent il n'y a qu'une seule

.../...

<u>manière unique</u> de décomposer t sur u, v, w.

Il suffit donc de vérifier que

si $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$ est ce que

nécessairement $\lambda_1 = 0_{\mathbb{R}}$, $\lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}$, $\lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$

(il n'y a ~~d'au~~ pas d'autres solutions que $\lambda_1 = 0_{\mathbb{R}}, \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}, \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$

Or ceci est facilement vérifiable

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}} \\ \lambda_1 = 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

et on voit facilement que $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ et il n'y a pas d'autres solutions.

d'où l'<u>unicité de la décomposition</u> de tout vecteur $t = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sur $\{u, v, w\}$.

IV developpons $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^5$.

c'est de la forme $(A+B)^n$ qui est egal à $\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$

avec ici $n = 5$, ~~alors~~ $A = 2x$ et $B = \frac{1}{2}$ ainsi $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k (2x)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}$

Soit $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^5 = C_5^0 (2x)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1 (2x)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^2 (2x)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_5^3 (2x)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_5^4 (2x)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_5^5 (2x)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0$

$= 1 \times 1 \times \frac{1}{2^5} + 5 \times 2x \times \frac{1}{2^4} + 10 \times 4x^2 \times \frac{1}{2^3} + 10 \times 8x^3 \times \frac{1}{2^2} + 5 \times 16x^4 \times \frac{1}{2} + 1 \times 32 \times x^5 \times 1$

car $C_5^k = \frac{5!}{k!(5-k)!}$ ainsi $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3 \times 2 \times 1}}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{3 \times 2 \times 1}} = 10$

et $A^0 = 1$ quelque soit A.

Ainsi $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} + \frac{5}{8}x + 5x^2 + 20x^3 + 40x^4 + 32x^5$

V Donnez le coefficient du terme constant de $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^5$

En developpant $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^5$ on trouve $\sum_{k=0}^{5} C_5^k (2x)^k \times \left(\frac{1}{2x}\right)^{n-k}$

en utilisant l'expression $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $A = 2x$, $B = \frac{1}{2x}$

Ainsi un terme général du developpement est $C_n^k (2x)^k \left(\frac{1}{2x}\right)^{n-k}$

soit $C_n^k \times 2^k \times x^k \times \frac{1^{n-k}}{(2x)^{n-k}} = C_n^k \times 2^k \times x^k \times \frac{1}{2^{n-k} \times x^{n-k}}$

$= C_n^k \times 2^k \times 2^{-(n-k)} \times x^k \times x^{-(n-k)} = C_n^k\, 2^{k-n+k} \times x^{k-n+k}$

$= C_n^k \times 2^{2k-n} \times x^{2k-n}$

or le terme constant du developpement correspond au terme ayant x elevé à la puissance 0.

c'est-à-dire $2k-n=0$ autrement dit $k=\frac{n}{2}$

où $n=5$.

or k doit être un nombre entier donc $\frac{n}{2}$ n'etant pas une valeur entière $\left(\frac{5}{2}=2{,}5\right)$ donc le terme constant n'existe pas dans le developpement de $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^5$

VI on a : $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a/ Calcul $Y=PX$ $\quad Y=PX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y \\ x \end{pmatrix}$

ainsi $\begin{cases} a = x+y+z \\ b = x+y \\ c = x \end{cases}$

b/ Que donne ${}^tPDP$ $\quad {}^tP$ est la transposée de P ~~les~~ une lignes de P devient une colonne dans ${}^t\underline{P}$ ainsi si $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors la 1ère ligne devient la 1ère colonne, la 2ème ligne devient la 2ème colonne la 3e ligne devient la 3e colonne ainsi ${}^tP=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

on remarque que ${}^tP = P$.

$${}^tPDP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi ${}^tPDP = A$.

c/ si $Q = {}^tXAX$ alors $Q = {}^tYDY$

En effet $A = {}^tPDP$ (cf. question b/), ainsi dans $Q = {}^tXAX$ on peut substituer A soit $Q = {}^tX \times ({}^tPDP)X = {}^tX\,{}^tP\,D\,PX$

$= ({}^tX\,{}^tP)\,D(PX) = {}^t(PX).D.(PX)$ puisque ${}^t(MN) = {}^tN.{}^tM$

$= {}^tY.D.Y$ puisque $Y = PX$ (cf. question a/)

d'où si $Q = {}^tXAX$ alors $Q = {}^tYDY$.

d/ Expression de la forme quadratique $Q(x,y,z)$

$$Q = {}^tXAX = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 6x+3y+z \\ 3x+3y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

dimensions : $(1,3)$ $(3,3)$ $(3,1)$; $(1,3)$ $(3,1)$

$Q = {}^tXAX = x(6x+3y+z) + y(3x+3y+z) + z(x+y+z)$

$Q(x,y,z) = 6x^2 + 3xy + xz + 3yx + 3y^2 + yz + zx + zy + z^2$

$Q(x,y,z) = 6x^2 + 3y^2 + z^2 + 6xy + 2xz + 2yz$

e/ Donnez une décomposition en somme de carrés de $Q(x,y,z)$

Notons que $Q = {}^tXAX$ qui implique $Q = {}^tYDY$ (cf question c))

ainsi d'une part $Q(x,y,z) = 6x^2+3y^2+z^2+6xy+2xz+2yz$

d'autre part $Q = {}^tYDY = (a,b,c)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (a,b,c)\begin{pmatrix}a\\2b\\3c\end{pmatrix}$

$= a^2+2b^2+3c^2$

or nous avons d'après question a) $Y = PX$ soit $\begin{cases} a = x+y+z \\ b = x+y \\ c = x \end{cases}$

Ainsi $Q(x,y,z)$ est aussi $(x+y+z)^2+2(x+y)^2+3x^2$ en remplaçant dans $a^2+2b^2+3c^2$ a, b et c par leur expression respective

d'où une décomposition en somme de carré de $6x^2+3y^2+z^2+6xy+2xz+2yz$ est $(x+y+z)^2+2(x+y)^2+3x^2$.

f/ tous les coefficients des termes au carrés sont positifs dans la décomposition en somme de carré de $Q(x,y,z)$

Ainsi $Q(x,y,z)$ est une forme positive.

Est ce qu'elle est definie positive ?

Elle est définie positive si $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ l'egalité $Q(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}}$ entraîne nécessairement $x=0$, $y=0$, $z=0$. C'est à dire il n'y a que $x=0$, $y=0$, $z=0$ comme solution de l'équation $Q(x,y,z)=0$.

$Q(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}} \iff (x+y+z)^2+2(x+y)^2+3z^2 = 0$ où chaque terme est positif ou nul : $\begin{cases}(x+y+z)^2 \geq 0 \\ 2(x+y)^2 \geq 0 \\ 3z^2 \geq 0\end{cases}$ vue que leur somme est nulle, il n'y a pas d'autre possibilité que $(x+y+z)^2=0$, $2(x+y)^2=0$, $3z^2=0$

ainsi $z=0$ et par la suite $y=0$ puis $z=0$

VII. a/ $Q(x,y,z) = -2x^2-y^2-5z^2+2xy+2xz+2yz = -(2x^2+y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz)$

or $2x^2+y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz$ a été traité en TD corrigé où nous avons trouvé $(-x+y-z)^2+(2z-x)^2$ ainsi $Q(x,y,z) = -(-x+y-z)^2-(2z-x)^2$

b) tous ses coefficients sont négatifs donc elle est negative

c) Elle n'est pas definie car $x=2z$ et $y=3z$ et z sont solutions ainsi $\begin{cases} z=1 \\ y=3, x=2 \end{cases}$ que $\begin{cases} z=2 \\ y=6, x=4 \end{cases}$