Interro du Jeudi

exo II

nBB nBN

2n Boules en tout

$\xrightarrow{\text{on tire}}$ 6 boules successivement et on remet

les probabilités :

$$\begin{cases} 0BB & 6BN & S = 0\times2 + 5\times6 = 30 \\ 1BB & 5BN & S = 1\times2 + 5\times5 = 27 \\ 2BB & 4BN & S = 2\times2 + 5\times4 = 24 \\ 3BB & 3BN & S = 3\times2 + 5\times3 = 21 \\ 4BB & 2BN & S = 4\times2 + 5\times2 = 18 \\ 5BB & 1BN & S = 5\times2 + 5\times1 = 15 \\ 6BB & 0BN & S = 6\times2 + 5\times0 = 12 \end{cases}$$

$\cdot\ \Omega(S) = \{12 ; 15 ; 18 ; 21 ; 24 ; 27 ; 30\}$

Probabilité pour tirer une boule blanche $= \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

on note $X_i = 1$ si on tire une boule blanche au i^{eme} tirage.

et $X_i = 0$ sinon

$\text{Prob}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ $\quad X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ (loi de Bernoulli)

on note Y le nombre de boules blanches tirés au bout de 6 tirages.

$Y = \sum_{i=1}^{6} X_i$ somme 6 variables de Bernoulli independant

alors Y suit $\mathcal{B}\left(6 ; \frac{1}{2}\right)$ (Binomial.

Ainsi on a la distribution suivante ex : $\text{Prob}(S=24) = \text{Pr}(Y=2) = C_6^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^4$

i	0	1	2	3	4	5	6
S	12	15	18	21	24	27	30
Y	6	5	4	3	2	1	0
p_i	$C_6^6\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$C_6^0\left(\frac{1}{2}\right)^6$

<u>Verification</u> $\sum_{i=1}^{6} p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \sum_{i=0}^{6} C_6^i = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times (1+1)^6 = 1$ puisque $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n$

<u>Esperance de S</u> :

Remarquons que $S = 2\times Y + 5\times(6-Y)$ soit $S = 30 - 3Y$

Ainsi $E(S) = E(30-3Y) = E(30) - E(3Y) = E(30) - 3E(Y)$ linearité de l'esperance

or $Y \sim \mathcal{B}\left(6 ; \frac{1}{2}\right)$ donc $E(Y) = 6\times\frac{1}{2} = 3$ et $E(30) = 30$ car nbe certain.

Ainsi $E(S) = 30 - 9 = 21$

de même $\operatorname{Var} S = \operatorname{Var}(30-3Y) = \operatorname{Var}(-3Y) = 9\operatorname{Var}(Y) = 9 \times 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{27}{2}$

puisque $\begin{cases} \operatorname{Var}(a+Z) = \operatorname{Var}(Z) \text{ si } a \text{ constante} \\ \operatorname{Var}(bZ) = b^2 \operatorname{Var}(Z) \end{cases}$

<u>Calcul de</u> $\operatorname{Prob}(|S - E(S)| \geq 5)$

d'après l'inégalité de Bienaymé Tchebitchef

$$\operatorname{Prob}(|S - E(S)| \geq 5) \leq \frac{\operatorname{Var}(S)}{5^2} =$$

Ainsi $\operatorname{Prob}(|S - E(S)| \geq 5) \leq \frac{27}{2} \times \frac{1}{25} = \frac{54}{100} \simeq 0{,}54$

<u>Conclusion</u> : la probabilité que la somme S s'écarte de son esperance de 5 est inferieure à 54%

<u>Calcul de</u> $\operatorname{Prob}(|S - E(S)| \geq 10)$ par Bienaymé Tchebitcheff

$$\operatorname{Prob}(|S - E(S)| \geq 10) \leq \frac{\operatorname{Var} S}{10^2} = \frac{27}{2} \times \frac{1}{100} = \frac{13{,}5}{100}$$

<u>Ainsi</u> la probabilité que la somme S s'écarte de son esperance de 10 est inferieure à 13,5%

c/ Si on effectue le même calcul en utilisant la loi de S.

dans le premier cas on veut que $|S - E(S)| \geq 5$ soit $|S - 21| \geq 5$

soit $S \geq 21+5$ ou $S \leq 21-5$ soit $S \geq 26$ ou $S \leq 16$

d'où $|S - E(S)| \geq 5 \iff S \in \{12; 15; 27; 30\} \iff Y \in \{0; 1; 5; 6\}$

Ainsi $\operatorname{Prob}(|S - E(S)| \geq 5) = \operatorname{Prob}(Y \in \{0; 1; 5; 6\}) = \frac{1}{2^6}(1+6+6+1)$

$$= \frac{14}{64} = \frac{7}{32} \simeq \frac{22}{100}$$

<u>Ccl</u> dans le premier cas la probabilité cherchée vaut 22% $(\leq 54\%)$

dans le second cas on veut $|S - E(S)| \geq 10$ soit $\begin{cases} S \geq 21+10 \text{ ou } S \leq 21-10 \\ S \geq 31 \text{ ou } S \leq 11 \end{cases}$

soit $S \in \emptyset$ d'où la probabilité cherché est <u>0</u>

d/ L'inégalité de Bienaymé Tchebitchef nous donne toujours une valeur valable pour n'importe quelle loi donc elle donne un <u>majorant</u> que la <u>vraie</u> probabilité ne depassera pas.