Interro du Vendredi

Exo II

on lance un dé à 6 faces supposé equilibré

$\cancel{Y}$ etant le numéro obtenu $X \in \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad Prob(\cancel{Y}=k)=\frac{1}{6}$

$Prob(\cancel{Y}=5 \text{ ou } \cancel{Y}=6) = Prob(Y=5) + Prob(Y=6)$ vu que ces deux évènements sont disjoints, ainsi $Prob(Y=5 \text{ ou } Y=6) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

~~on repete~~ On repete n fois l'epreuve.

notons $Z_i = 1$ si à la i^{eme} epreuve $Y=5$ ou $Y=6$ donc Z_i suit une loi de Bernouilli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$

Si on note X le nombre d'apparition de 5 ou 6 alors $X=\sum_{i=1}^{n} Y_i$

X etant la somme de n variables de Bernoulli independants

donc $X \sim$ Binomiale $X \sim \mathcal{B}\left(n ; \frac{1}{3}\right)$ si $n>30$, $np>15$, $nq>15$

$X \simeq N\left(\frac{n}{3}, \frac{2n}{9}\right)$ approximation par loi normale

on note $F = \frac{X}{n}$: combinaison linéaire d'une variable suivant une loi normale

F va suivre une loi normale de paramètre $E\left(\frac{X}{n}\right)$ et $Var\left(\frac{X}{n}\right)$

ainsi ~~soit~~ $F \sim N\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{9n}\right)$ car
$$\begin{cases} E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}\times\frac{n}{3} = \frac{1}{3} = E(F) \\ Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{2n}{9}\times\frac{1}{n^2} = \frac{2}{9n} = Var(F) \end{cases}$$

b/ on lance 320 000 fois le dé $n = 320\,000$, on trouve $f = 0{,}338$

on cherche : $Prob\left(|F - E(F)| \geq |0{,}338 - E(F)|\right)$

or d'après l'inégalité de Bienaymé Tchebitcheff.

$$Prob\left(|F-E(F)| \geq |0{,}338 - E(F)|\right) \leq \frac{Var(F)}{|0{,}338 - E(F)|^2}$$

soit $Prob\left(|F - \frac{1}{3}| \geq |0{,}338 - 0{,}333|\right) \leq \frac{2}{9n\,|0{,}005|^2} = \frac{2}{9n \times (5\times10^{-3})^2}$

or : $\frac{2}{9n(5\times10^{-3})^2} = \frac{2}{9\times 32\times10^4 \times 25\times10^{-6}}$ où $n = 320\,000 = 32.10^4$

$= \frac{10^2}{9\times16\times25\times} = \frac{10^2}{9\times100\times4} = \frac{1}{36}$

d'après l'inégalité de Bienayme Tchebitcheff la probabilité cherchée ne depassera pas $\frac{1}{36}$

c/ n étant grand, F est considéré comme suivant une loi normale $N\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{9 \times 320\,000}\right)$

Cherchons $\text{Prob}\left(\left|F - \frac{1}{3}\right| \geq \left|0{,}338 - \frac{1}{3}\right|\right)$

$$= \text{Prob}\left(\frac{F - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{9 \times 32 \times 10^4}}} \geq \frac{0{,}005}{\sqrt{\frac{2}{9 \times 32 \times 10^4}}}\right)$$ après centrage et réduction

$$= \text{Prob}\left(N(0,1) \geq \frac{5 \times 10^{-3} \times 4 \times 3 \times 10^{2}}{}\right)$$

$$= \text{Prob}\left(N(0,1) \geq 60 \times 10^{-1}\right)$$

$$= \text{Prob}\left(N(0,1) \geq 6\right) = 1 - \text{Prob}\left(N(0,1) < 6\right)$$

$$\simeq 1 - 0{,}9999999$$

$$\simeq 0$$

La probabilité cherchée est quasi nulle.

d/ Ainsi

→ Pour que l'écart considéré soit supérieur à $|0{,}338 - 0{,}333| = 0{,}005$ on a la probabilité quasi nulle.

d'où l'événement $\{|F - E(X)| \geq |0{,}005|\}$ est un événement très très rare si on ne considère que le dé est équilibré et qu'il n'y a que l'effet du hasard.

Vu cette rareté exceptionnelle on peut considérer que l'hypothèse d'un dé parfaitement équilibré est à rejeter.

Remarquons que l'inégalité de Bienaymé Tchebitchef nous donne le majorant $\frac{1}{36}$ de cette probabilité valeur assez approximative, voire très approximative.