0.1 LICENCE ECO PREMIERE ANNEE SEMESTRE 2

0.2 FEUILLE D'EXERCICES N° 1

I Résoudre les systèmes à inconnues réelles :

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+6y-z=-3 \\ x-y+z=2 \\ -x-3y+3z=9 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} x+2y+3z-2t=1 \\ x+y-z-t=0 \\ x+3y+7z-3t=2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} x+3y-z=0 \\ 2x+5y+3z=5 \end{array}\right.$$

II Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants où m est un paramètre réel :

$$\left\{\begin{array}{c} 3x+4y-7z=-29 \\ x+y+z=4 \\ mx+y+z=m+3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} x-y-2z=6 \\ 3x+my+z=m \\ 2x+y-z=6 \end{array}\right.$$

III On donne le système :

$$\left\{\begin{array}{c} x+y-3z+t=8 \\ 2x-3y-4z+t=7 \\ 3x-2y+mz+2t=p \end{array}\right.$$

où m et p sont des paramètres réels.

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, discuter de l'existence et du nombre de solutions du système en fonction des valeurs des paramètres m et p (on ne demande pas de calculer les solutions quand elles existent).
2. Résoudre ce système dans le cas où $m=1$ et $p=-1$.

IV (Examen) On donne la matrice $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. En déduire la résolution du système :

$$\left\{\begin{array}{c} 3x-y+z=1 \\ -x+3y-z=-1 \\ x-y+2z=3 \end{array}\right.$$

V (Examen) Considérons le système linéaire suivant (S_m), où m est un paramètre réel :

$$(S_m)\left\{\begin{array}{c} 2x+my+z=1 \\ x+3y+(m+2)\,z=-2 \\ 4x+(2m+1)\,y+3z=2 \end{array}\right.$$

1. En utilisant la méthode de Gauss, transformer le système S_m en un système triangulaire équivalent.

2. Discuter suivant les valeurs du paramètre m de l'existence, de la nature et de la valeur des solutions.

3. On pose $m = 1$.

   (a) Ecrire le système (S_1) sous forme matricielle $A.X = Y$ où A, X et Y sont trois matrices que vous expliciterez.

   (b) Montrer que la matrice A n'est pas inversible.

VI (Examen) On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 1 \\ (b+c)x & +(c+a)y & +(a+b)z & = 4 \\ bcx & +acy & +abz & = 5 \end{array}\right.$$

où a, b, c sont 3 paramètres réels.

Partie 1 Dans cette partie, on prend $a = 3, b = 1$ et $c = 2$

1. Résoudre le système par la méthode du pivot.

2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse A^{-1}. Retrouver les résultats du 1°) en utilisant A^{-1}.

Partie 2 a, b, c sont maintenant des paramètres réels quelconques.

1. Mettre la matrice complète du système sous forme triangulaire supérieure.

2. Combien y a-t-il de solutions si a, b et c sont deux à deux distincts (on ne demande pas de les calculer) ?

3. Que se passe-t-il si $a = c$ ou $b = c$?

VII Les grandes entreprises qui souhaitent emprunter sur les marchés financiers demandent à des agences spécialisées de les noter (on a quelques exemples prouvant qu'il ne faut pas accorder une confiance aveugle à ces agences...). Supposons pour simplifier qu'il y ait 4 notes A, B, C, D, qui sont revues chaque année par ces agences. Le tableau suivant donne la proportion d'entreprises passant d'une catégorie à l'autre en un an : la première colonne désigne la note initiale et la première ligne la note obtenue l'année suivante.

	A	B	C	D
A	0,95	0,03	0,02	0
B	0,02	0,93	0,05	0
C	0,01	0,06	0,90	0,03
D	0	0	0	1

Par exemple, 95 % d'entreprises notées A gardent la même note d'une année sur l'autre alors que 3 % passent de A à B.

1. Trouver tous les cas possibles amenant une entreprise notée B la première année à la note C au bout de 2 ans. Que remarquez vous ?

2. En déduire que la tableau donnant les pourcentages de passage d'une note à l'autre sur 2 ans est obtenu par :

$$\begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 & 0,02 & 0 \\ 0,02 & 0,93 & 0,05 & 0 \\ 0,01 & 0,06 & 0,90 & 0,03 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2$$

   Effectuer ce calcul (on est autorisé, pour une fois, à utiliser une calculatrice ou un ordinateur).

VIII On donne le système :

$$\left\{ \begin{bmatrix} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 4x + 2y - z = 4 \end{bmatrix} \right.$$

1. Résoudre ce système par la méthode du pivot.

2. Ecrire ce système sous forme matricielle. Montrer, par la méthode de Gauss-Jordan, que la matrice de ce système est inversible et calculer son inverse. Retrouver alors les résultats du 1°).

IX a, b, c sont trois réels. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.