IV. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$$

1. Étudier la fonction f et en donner une représentation graphique (C) (les courbes représentatives des fonctions polynômes de degré 2 sont des paraboles). On notera O l'origine du repère.

2. Soit (Δ) la droite d'équation $y = 2$, M un point quelconque de (C) et H sa projection orthogonale sur la droite (Δ). Montrer que $MH = MO$ (le point O est alors appelé foyer de la parabole et la droite Δ est sa directrice).

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$$

1/ Etude de la fonction f

a/ Domaine de définition.

$f(x)$ est un polynôme du second degré. f est alors définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R}$, $D_f =]-\infty ; +\infty[$

b/ Limites aux bornes

Vu $D_f =]-\infty ; +\infty[$, nous avons à étudier les comportements respectifs de f aux bornes $-\infty$ puis $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{\infty}{4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{\infty}{4} = -\infty$$

c/ Parité de la fonction

On remarque que la fonction f est paire en effet $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$ puisque $1 - \frac{(-x)^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{4}$

On peut donc restreindre le domaine d'étude de la fonction sur la partie $[0 ; +\infty[$, l'autre partie s'obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées Oy puisque ~~la~~ courbe d'une fonction paire ~~est symé~~ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

d/ Etude de sa variation

d.1 Calcul de sa dérivée : $f'(x) = \cancel{\ } \frac{2x}{4}$

$f'(x) = \cancel{1} - \frac{x}{2}$ $f'(x) = -\frac{x}{2}$

d.2 Etude du signe de sa dérivée

$f'(x) > 0 \iff 0 - \frac{x}{2} > 0 \iff 0 > \frac{x}{2} \iff x < 0$

Ainsi si $x < 0$ la dérivée est positive alors la ~~courbe~~ fonction f est croissante sur $]-\infty ; 0[$

d.3 Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+			0		−		
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

obtenu par symétrie par rapport à Oy.

$f'(0) = 0$, $f(0) = 1$ au pt $(0 ; 1)$ tangente horizontale et on le tableau de variation $f(x)$ passe par un maximum pour $x = 0$ et le maximum sera 1.

d.4 : Quelques points particuliers

$x = 0$ $f(0) = 1$ tangente horizontale.

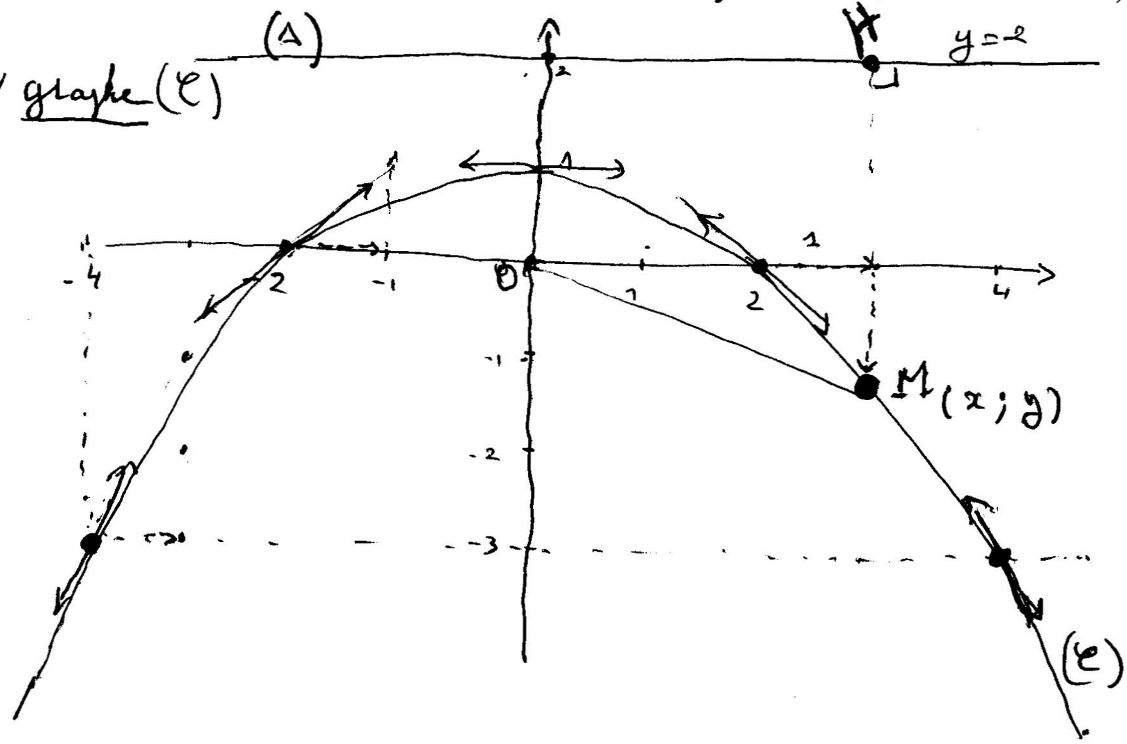
$f(x) = 0$ alors $x = 2$ ou $x = -2$

ainsi si $x = -2$ $f(-2) = 0$ $f'(-2) = 1$ tangente oblique de pente 1

ainsi si $x = 2$ $f(2) = 0$ $f'(2) = -1$ tangente oblique de pente -1

$x = -4$ $f(-4) = -3$ $f'(-4) = 2$

e/ graphe $(\mathcal{C})$



TD1 exo IV 2/ (Δ) étant la droite d'équation $y = 2$

M étant un point de ($\mathcal{C}$)

H projection orthogonale de M sur la droite (Δ)

<u>Montrons que $MH = MO$</u>

· si M a pour coordonnées (x, y)

· Comme M est sur la courbe ($\mathcal{C}$) alors ses coordonnées vérifient l'équation de ($\mathcal{C}$) : $y = 1 - \frac{x^2}{4}$

Ainsi $M\left(x\,;\,1 - \frac{x^2}{4}\right)$

· Comme H est la projection orthogonale de M sur la droite (Δ) qui est parallèle à l'axe Ox. (vu que son équation est $y=2$) alors l'abscisse de H sera x. et son ordonnée sera 2

$H(x\,;\,2)$

· D'où la distance MH sera égale à $\sqrt{(x_H - x_M)^2 + (y_H - y_M)^2}$ si on note (x_H, y_H) et (x_M, y_M) les coordonnées respectives de H et de M.

ainsi $MH = \sqrt{0^2 + \left[\left(2 - \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\right)\right]^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^2} = 1 + \frac{x^2}{4}$

car $1 + \frac{x^2}{4} > 0$

<u>D'autre part</u> la distance OM ou MO sera $\sqrt{x_M^2 + y_M^2}$

soit $MO = \sqrt{x^2 + \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16}}$

Soit $MO = \sqrt{1 + 2\frac{x^2}{4} + \left(\frac{x}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^2} = 1 + \frac{x^2}{4}$ car $1 + \frac{x^2}{4} > 0$

Par conséquent on vient de montrer que

$MH = MO$ qui est une propriété des points d'une parabole par rapport ~~à~~ ~~[illegible]~~ à son foyer et sa directrice.