Tout résultat non justifié n'est pas pris en compte

1/ Donner l'ensemble de définition et chercher la limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = x\sqrt{2x-1} - 8x^2 - 5$

2/ Donner l'ensemble de définition et chercher la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de h définie par $h(x) = \sqrt{4x^2-36} + 60x$

3/ Donner l'ensemble de définition et chercher la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de g définie par $g(x) = 2x^2 + x^3\sqrt{1-3x} - 5$

4/ Effectuez la division euclidienne du polynôme $-2x^3 + x^2 + 2x - 1$ par le polynôme $2x - 1$

5/ Soit la fonction k définie par $k(x) = \dfrac{-2x^3 + x^2 + 2x - 1}{4x^2 - 1}$,
Donnez l'ensemble D_k de k. Cherchez les limites de k aux bornes ouvertes de cet ensemble. [D_k est l'ensemble de définition de k]

1/a/ Ensemble de définition de $f(x) = x\sqrt{2x-1} - 8x^2 - 5$

la fonction f n'existe pas si l'expression sous la racine carrée est négative, c'est-à-dire si $2x - 1 < 0$ soit si $2x < 1$ soit si $x < \frac{1}{2}$

Ainsi $D_f = \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ ou $D_f = \mathbb{R} \setminus \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$ ou $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} ,\ x \geq \frac{1}{2}\right\}$

b/ limite en $+\infty$ de f.

Quand $x \longrightarrow +\infty$ alors $f(x) \longrightarrow \infty \times \sqrt{\infty} - \infty$ soit $\infty - \infty$

qui est une forme indeterminée. Levons l'indetermination.

Pour lever l'indetermination, comme $x \longrightarrow \infty$, essayons de mettre x^2 en facteur

$f(x) = x\sqrt{2x-1} - 8x^2 - 5$ soit $f(x) = x^2\left[\frac{\sqrt{2x-1}}{x} - 8 - \frac{5}{x^2}\right]$

soit $f(x) = x^2\left[\sqrt{\frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} - 8 - \frac{5}{x^2}\right]$

soit $f(x) = x^2\left[\sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} - 8 - \frac{5}{x^2}\right]$

Ainsi si $x \longrightarrow +\infty$

alors $f(x) \longrightarrow +\infty \times \left(\sqrt{0 - 0} - 8 - 0\right)$

Par conséquent : si $x \longrightarrow +\infty$ alors $f(x) \longrightarrow +\infty \times (-8)$

Conclusion : si $x \longrightarrow +\infty$ alors $f(x) \longrightarrow -\infty$

2/a/ Domaine de définition de $h(x) = \sqrt{4x^2 - 36} + 60x$

la fonction h n'existe pas si l'expression sous la racine carrée est négative. Ainsi il faut que $4x^2 - 36 \geq 0$

$4x^2 - 36$ est un trinôme du second degré. Son signe est le signe du coefficient du second degré sauf entre les racines si elles existent. Ici, le coefficient du terme du second degré est 4 qui est positif. Donc $4x^2 - 36$ sera toujours positif sauf entre les racines si elles existent. Or $4x^2 - 36 = (2x)^2 - 6^2$

soit $4x^2 - 36 = (2x-6)(2x+6)$ donc les racines sont $x = 3$ ou $x = -3$

Par conséquent : les racines de $4x^2 - 36$ sont 3 ou -3

En conclusion : $4x^2 - 36$ est toujours positif ou nul sauf entre 3 ou -3.

d'où $D_h =]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$

b/ limite de h en $-\infty$ ou en $+\infty$

quand $x \longrightarrow +\infty$ alors $h(x) \longrightarrow \sqrt{+\infty - 36} + 60 \times \infty$

ainsi $h(x) \longrightarrow +\infty + \infty$

soit $h(x) \longrightarrow +\infty$

quand $x \longrightarrow -\infty$ alors $h(x) \longrightarrow \sqrt{+\infty - 36} + 60 \times (-\infty)$

ainsi $h(x) \longrightarrow \infty - \infty$; c'est une forme indéterminée

il nous faut lever l'indétermination.

Quand $x \longrightarrow -\infty$, on peut écrire h en mettant en facteur x^2

Ainsi nous avons $h(x) = \sqrt{4x^2 - 36} + 60x = \sqrt{x^2\left(4 - \frac{36}{x^2}\right)} + 60x$

$h(x) = |x|\sqrt{4 - \frac{36}{x^2}} + 60x$ car $\sqrt{A^2 \times B} = |A| \times \sqrt{B}$ où $B > 0$

$h(x) = -x\sqrt{4 - \frac{36}{x^2}} + 60x$ puisque quand $x \longrightarrow -\infty$ $x < 0$ donc $|x| = -x$

soit $h(x) = -x\left[\sqrt{4 - \frac{36}{x^2}} - 60\right]$ et lorsque $x \longrightarrow -\infty$: $h(x) \longrightarrow +\infty \times \left[\sqrt{4 - 0} - 60\right]$

Par conséquent si $x \longrightarrow -\infty$ alors $h(x) \longrightarrow \infty \times (2 - 60)$

en conclusion si $x \longrightarrow -\infty$ alors $h(x) \longrightarrow -\infty$

3/ a/ Ensemble de définition de $g(x) = 2x^2 + x^3\sqrt{1-3x} - 5$

Le domaine de g correspond aux valeurs de x où $g(x)$ existe.

$g(x)$ existe si l'expression sous la racine carrée $(1-3x)$ est positive ou nulle, soit $1-3x \geq 0$ soit $1 \geq 3x$ soit $x \leq \frac{1}{3}$

Ainsi domaine de g : $D_g = \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right]$

b/ <u>limite de $g(x)$ quand</u> $x \longrightarrow +\infty$: n'existe pas puisque $D_g = \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right]$

<u>limite de $g(x)$ quand</u> $x \longrightarrow -\infty$: $g(x) \longrightarrow 2\times(+\infty) - \infty\sqrt{1+\infty} - 5$

ainsi quand $x \longrightarrow -\infty$: $g(x) \longrightarrow \infty - \infty$ qui est une forme indeterminée. Il faudra qu'on lève l'indetermination.

Pour lever l'indetermination on peut écrire $g(x)$ en mettant x^3 en facteur puisque $x \longrightarrow -\infty$.

$g(x) = 2x^2 + x^3\sqrt{1-3x} - 5$ soit $g(x) = x^3\left[\frac{2}{x} + \sqrt{1-3x} - \frac{5}{x^3}\right]$

Ainsi si $x \longrightarrow -\infty$ $g(x) \longrightarrow -\infty \times [0 + \infty - 0]$

Par conséquent $x \longrightarrow -\infty$ $g(x) \longrightarrow -\infty \times +\infty$

En conclusion : si $x \longrightarrow -\infty$ $g(x) \longrightarrow -\infty$

4/ Effectuons la division euclidienne du polynôme $-2x^3 + x^2 + 2x - 1$ par le polynôme $2x - 1$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-2x^3 & +x^2 & +2x & -1 & 2x-1 \\
\ominus\ -2x^3 & +x^2 & & & \hline -x^2+1 \\
\hline
0 & 0 & +2x & -1 & \\
& \ominus & +2x & -1 & \\
\cline{3-4}
& & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Ainsi $-2x^3 + x^2 + 2x - 1 = (2x-1)(-x^2+1)$.

On peut effectuer une vérification en redeveloppant.

5/ On a la fonction k : $k(x) = \dfrac{-2x^3 + x^2 + 2x - 1}{4x^2 - 1}$

a/ Ensemble de définition de k.

$k(x)$ n'existe pas si le dénominateur est nul. c-à-d

si $4x^2 - 1 = 0$ soit si $(2x)^2 - 1^2 = 0$ soit si $(2x-1)(2x+1) = 0$

soit si $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Par conséquent $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\}$

$D_k =]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$

b/ Recherche des limites de $k(x)$ lorsque $x \longrightarrow -\infty$

ou lorsque $x \longrightarrow +\infty$

ou lorsque $x \longrightarrow -\frac{1}{2}$ par VI (valeur inf)

ou lorsque $x \longrightarrow -\frac{1}{2}$ par VS (valeur sup)

ou lorsque $x \longrightarrow \frac{1}{2}$ par VI

ou lorsque $x \longrightarrow \frac{1}{2}$ par VS

α) lorsque $x \longrightarrow -\infty$, nous pouvons mettre x^3 en facteur au numérateur et x^2 au dénominateur car ce sont les termes du plus haut degré respectivement au numérateur et au dénominateur et puisque $k(x)$ est une fraction rationnelle

Ainsi $k(x) = \dfrac{x^3(-2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^2(4 - \frac{1}{x^2})}$ soit $k(x) = \dfrac{x(-2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{4 - \frac{1}{x^2}}$

d'où si $x \longrightarrow -\infty$ alors $k(x) \longrightarrow \dfrac{-\infty \cdot (-2 + 0 + 0 + 0)}{4 - 0}$

Par conséquent si $x \longrightarrow -\infty$ alors $k(x) \longrightarrow \dfrac{-\infty \times -2}{4}$

en conclusion si $x \longrightarrow -\infty$ alors $k(x) \longrightarrow +\infty$

β) lorsque $x \longrightarrow +\infty$ on peut écrire $k(x) = \dfrac{x(-2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{4 - \frac{1}{x^2}}$

en procédant comme précédemment.

Par conséquent si $x \longrightarrow +\infty$ alors $k(x) \longrightarrow \dfrac{+\infty \times -2}{4}$

en conclusion si $x \longrightarrow +\infty$ alors $k(x) \longrightarrow -\infty$