Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{1-x}$ et g la fonction telle que $g(x) = \sqrt{f(x)}$

1/ Determinez les réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{1-x}$ pour tout x de l'ensemble de définition de f.

2/ Donnez le domaine de définition de f, le domaine de définition de g, dérivez de g et son domaine.

3/ Determinez les limites respectives de $f(x)$ aux bornes de f.
on note $(\mathcal{C})$ la courbe de f. Montrez que $(\mathcal{C})$ admet la droite d'équation $y = -x-2$ comme asymptote lorsque x tend vers $-\infty$

4/ Tableau de variation de f. Donnez la pente de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0. Decrivez comment on place cette tangente.

5/ Montrez que le point $J(1\,;-3)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$

Elements de

Correction de l'evaluation n° 2

1/ $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{1-x}$ déterminons a, b, c trois réels

tels que $\dfrac{x^2+x+2}{-x+1} = ax+b+\dfrac{c}{-x+1}$ pour $1-x \neq 0$ soit $x \neq 1$

1ère méthode : par division des polynômes.

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +x & +2 & -x+1 \\ \ominus\ x^2 & -x & & \overline{-x-2} \\ \hline 0 & 2x & +2 & \\ \ominus & 2x & -2 & \\ \hline & 0 & 4 & \end{array}$$

ainsi $\dfrac{x^2+x+2}{-x+1} = -x-2+\dfrac{4}{-x+1}$

$$f(x) = -x-2+\frac{4}{1-x}.$$

2e méthode : par identification.

pour $x \neq 1$, $\dfrac{x^2+x+2}{-x+1} = ax+b+\dfrac{c}{-x+1}$

soit $\dfrac{x^2+x+2}{-x+1} = \dfrac{(ax+b)(-x+1)+c}{-x+1} = \dfrac{-ax^2-bx+ax+b+c}{-x+1}$

soit $\dfrac{x^2+x+2}{-x+1} = \dfrac{-ax^2+x(a-b)+b+c}{-x+1}$ pour tout $x \neq 1$

soit $x^2+x+2 = -ax^2+(a-b)x+(b+c)$ pour tout $x \neq 1$

Par conséquent : par identification des 2 polynômes à condition $x \neq 1$ les coefficients des termes de même degré sont égaux.

$\begin{cases} 1=-a \\ 1=a-b \\ 2=b+c \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=4 \end{cases}$ Ainsi $f(x) = -x-2+\dfrac{4}{1-x}$

2/ D_f : il faut que le dénominateur soit non nul

soit $1-x \neq 0$ ainsi $x \neq 1$

Par conséquent $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

ou $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

D_g : il faut que l'expression sous la racine carrée soit positive ou nulle et il ne faut pas que le dénominateur soit nul.

$g(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{1-x}}$ déjà $x \neq 1$ et il faut $\dfrac{x^2+x+2}{1-x} \geq 0$

Pour étudier le signe de $\dfrac{x^2+x+2}{1-x}$ faisons un tableau des signes. $1-x > 0$ pour $x < 1$

x^2+x+2 étant un trinôme du second degré il sera tj du signe du coefficient du terme du second degré sauf entre les racines (si elles existent). Le coefficient du terme du second degré étant 1 alors x^2+x+2 sera tj positif sauf entre les racines mais celles ci n'existent pas puisque le discriminant $\Delta = 1^2 - 4.1.2$ est negatif : Donc pas de racine : le trinôme ne s'annule pas

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x^2+x+1	$+$		$+$
$1-x$	$+$	‖	$-$
$\dfrac{x^2+x+1}{1-x}$	$+$	‖	$-$

Par conséquent le domaine de g sera $]-\infty ; 1[$

$D_g =]-\infty ; 1[$

2/ suite : Dérivée de g

$g(x) = \sqrt{f(x)}$ ainsi $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ puisque g est de la forme $\sqrt{u}$

donc $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

il nous faut calculer $f'(x)$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ alors f' sera de la forme $\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

avec $u = x^2 + x + 2$: $u' = 2x + 1$

$v = 1 - x$: $v' = -1$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{(\cancel{2x} + 1)(1 - x) - (-1)(x^2 + x + 2)}{(1-x)^2}$

soit $f'(x) = \dfrac{(2x + 1 - 2x^2 - x) + (x^2 + x + 2)}{(1-x)^2}$

soit $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 1 + x^2 + x + 2}{(1-x)^2} = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{(1-x)^2}$

Autre méthode pour calculer f' en utilisant $f(x) = -x - 2 + \dfrac{4}{1-x}$

$f'(x) = -1 + \dfrac{4}{(1-x)^2}$ et si on met au même dénominateur

$f'(x) = \dfrac{-(1-x)^2 + 4}{(1-x)^2} = \dfrac{-1 - x^2 + 2x + 4}{(1-x)^2} = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{(1-x)^2}$

Par conséquent : $g'(x) = \dfrac{\dfrac{-x^2 + 2x + 3}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^2 + x + 2}{1-x}}} = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{2(1-x)^2\sqrt{\dfrac{x^2 + x + 2}{1-x}}}$

Domaine de g' : $D_{g'} =]-\infty ; 1[$

3/ limites de f(x) aux bornes de f $D_f :]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

les bornes sont $-\infty$; 1 par VI ; 1 par V.S. ; $+\infty$

à l'infini

si $x \to -\infty$: $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{-x + 1} = -x - 2 + \dfrac{4}{-x+1} \longrightarrow +\infty - 2 + 0 \longrightarrow +\infty$

si $x \to +\infty$: $f(x) = -x - 2 + \dfrac{4}{-x+1} \longrightarrow -\infty - 2 + 0 \longrightarrow -\infty$

si $x \xrightarrow[VI]{} 1$: $f(x) \longrightarrow -1 - 2 + \dfrac{4}{0^+} \longrightarrow +\infty$

si $x \xrightarrow[VS]{} 1$: $f(x) \longrightarrow -1 - 2 + \dfrac{4}{0^-} \longrightarrow -\infty$

3 suite :

Montrons de $(\mathcal{C})$ admet la droite d'équation $y=-x-2$ comme asymptote losque x tend vers $-\infty$

Nous avons remarqué précédement que lorsque $x \longrightarrow -\infty$ alors $f(x) \longrightarrow +\infty$ nous avons donc une branche infinie pour le graphe $(\mathcal{C})$.

Calculons l'ecart entre $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation $y=-x-2$ ainsi calculons la distance $|f(x)-(-x-2)|$, si cette distance tend vers 0 losque x tend vers $-\infty$ alors la droite d'équation $y=-x-2$ est bien une asymptote de $(\mathcal{C})$ lorsque $x \longrightarrow -\infty$.

D'où $$\left|f(x)-(-x-2)\right| = \left|\frac{x^2+x+2}{1-x}-(-x-2)\right| = \left|\left(-x-2+\frac{4}{-x+1}\right)-(-x-2)\right|$$
$$= \left|-x-2+\frac{4}{-x+1}+x+2\right| = \left|\frac{4}{-x+1}\right|$$

et lorsque $x \longrightarrow -\infty$ alors $\left|\frac{4}{-x+1}\right| \longrightarrow 0$

D'où l'écart :
$|f(x) - (-x-2)| \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow -\infty$

Par conséquent la droite d'équation $y=-x-2$ est bien une asymptote de $(\mathcal{C})$ pour $x \longrightarrow -\infty$

4/ Tableau de variation de f

le tableau de variation de f découle de l'étude du signe de la dérivée de f : $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$ (cf calculs de quest° 2)

le signe de $f'(x)$ = signe du numérateur $-x^2+2x+3$ car le dénominateur $(1-x)^2$ est toujours positif puisque c'est une expression au carré.

Le signe de $-x^2+2x+3$ dépend du signe du terme du second degré puisque c'est un trinôme du second degré. Son signe sera celui de son terme du second degré (donc ici negatif) sauf entre les racines (si elles existent)

4 suite :

et effectivement les racines existent puisque le discriminant Δ de $-x^2+2x+3$ vaut $2^2-4(-1)(3)=4+12=16$ qui est positif. D'où deux racines : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{-2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$

Conclusion $f'(x)$ est toujours negatif sauf entre les racines -1 et 3

x	$-\infty$		-1		0	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$	‖ $-\infty$	↗	-7	↘	$-\infty$

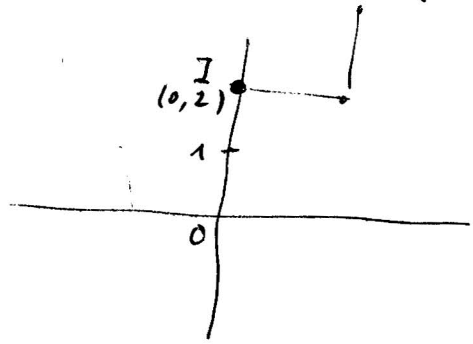
Points particuliers $x=0$ $f(0)=2$ $f'(0)=3$

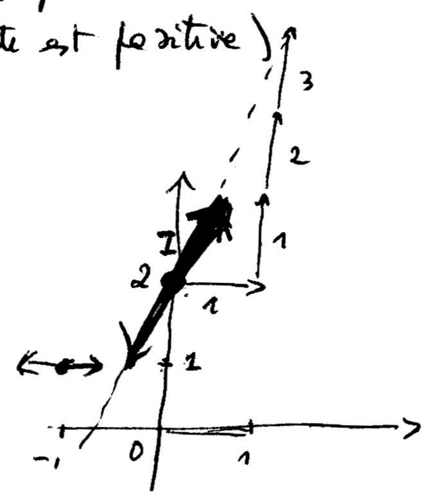
$x=-1$ $f(-1)=1$ $f'(-1)=0$ tangente horizontale Minimum

$x=3$ $f(3)=-7$ $f'(3)=0$ tangente horizontale Maximum

Remarquons que la courbe $(\mathcal{C})$ ne coupe pas l'axe des x puisque le numérateur x^2+x+2 ne peut pas s'annuler.

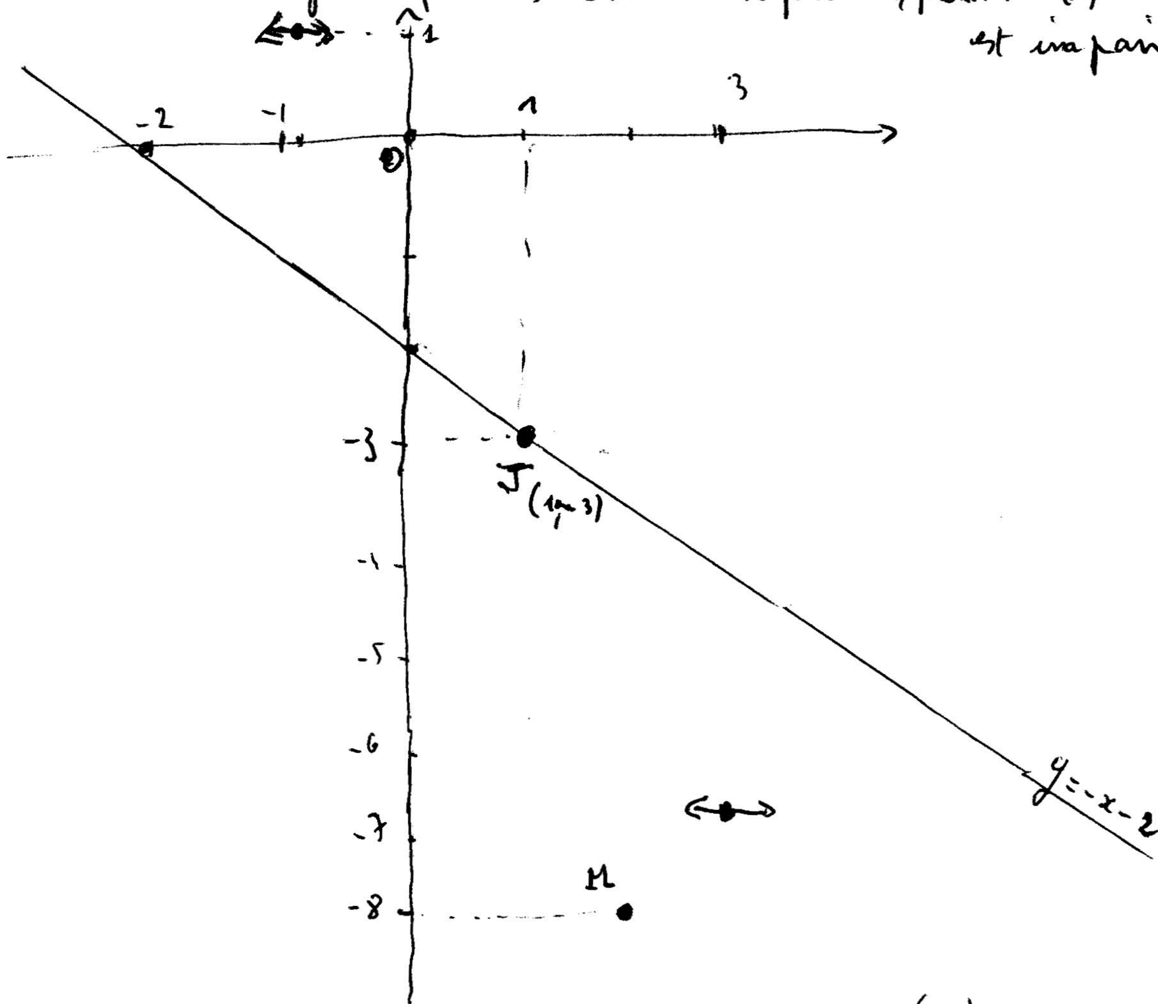
Pour placer la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au pt d'abscisse $x=0$, il suffit de placer la pente de cette tangente au point $I(0;f(0))$ soit $I(0;2)$. La dérivée au pt d'abscisse 0 vaut $f'(0)=3$. 3 est donc la pente de la tangente au pt d'abscisse 0. À partir du point I on avance d'une unité (vers la droite) puis on monte de 3 unités à la verticale. (on monte puisque la pente est positive)





5/ Montrons que le $J(1\,;-3)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.

Nous allons procéder à un changement de repère en plaçant une nouvelle origine $J(1\,;-3)$, l'ancienne origine étant $(0,0)$. Puis on vérifiera que dans ce nouveau repère l'expression $F(X)$ de la courbe $(\mathcal{C})$ est impaire.



On prend un pt $M(x, y)$ qui se trouve sur la courbe (C).

(x, y) sont ses coordonnées dans l'ancien repère d'origine $O(0,0)$

notons (X, Y) ses coordonnées dans le nouveau repère d'origine $J(1,3)$

D'après la relation des chasles nous avons la relation vectorielle :

$\vec{OM} = \vec{OJ} + \vec{JM}$ au niveau des composantes cela

s'écrit $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = -3 + Y \end{cases}$ puisque $\begin{cases} x = x_J + X \\ y = y_J + Y \end{cases}$

comme $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{1 - x}$ ou $y = -x - 2 + \dfrac{4}{1-x}$ alors $-3 + Y = -(1+X) - 2 + \dfrac{4}{1-(1+X)}$

soit $-3 + Y = -X - 3 + \dfrac{4}{-X}$ soit $Y = -X - \dfrac{4}{X}$ Soit $F(X) = -X - \dfrac{4}{X}$.

Pour que J soit un centre de symétrie, il faut que F soit impaire: $F(-X) = -F(X)$. c'est vérifié.