Si $X_1, \dots, X_{1000}$ ~~sont~~ des v.a indépendants

X_i suit la loi uniforme sur $[0;1]$

1. On note N le nombre de ces variables aléatoires inférieurs ou égales à 0,003

$N = \text{Card}\left(\{X_i \text{ tqus } X_i \leq 0{,}003\}\right)$

Notons Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si $X_i \leq 0{,}003$

et Y_i vaut 0 sinon.

Y_i suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p = \text{Prob}(X_i \leq 0{,}003)$

Y_i suit une loi uniforme sur $[0,1]$

$p = 3‰$ car X_i suit une loi uniforme sur $[0,1]$

en effet $p = \int_0^{0{,}003} f(x)\,dx = \int_0^{0{,}003} 1\,dx$ car la densité de X_i est la fonction constante 1 $\left(f(x) = 1 \text{, quelquesoit } x \in [0,1]\right)$

Ainsi Y_i suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0{,}003)$

et par conséquent $N = \sum_{i=1}^{1000} Y_i$, d'où N somme de 1000 variables aléatoire indépendants ~~suit~~ qui suivent respectivement la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0{,}003)$, N suit donc alors une loi binomiale $\mathcal{B}(1000\,;\,0{,}003)$.

Cette loi n'étant pas dans la table, proposons l'approximation de cette loi par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np = 3$.

Vérifions que les conditions de la validité de cette approximation sont respectées : $(n > 50,\ np < 5,\ p < 0{,}1)$

Ainsi $\text{Prob}(N < 5) = \sum_{k=0}^{4} C_{1000}^{k}\, p^k q^{1000-k}$

$\text{Prob}(N < 5) = \text{Prob}(N \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} e^{-3}\frac{3^k}{k!}$ et sur la table de la loi de poisson de paramètre 3 on lit $Pr(N \leq 4) = 0{,}8153$

Question 2 $M = \text{Card}\left(\left\{X_i \text{ ; tq } 0{,}25 \leq X_i \leq 0{,}75\right\}\right)$

Calculons $\text{Prob}(|M - 500| > 20)$

remarquons $\text{Prob}(|M-500| > 20) = 1 - \text{Prob}(|M-500| \leq 20)$

<u>Calculons</u> $\text{Prob}(|M-500| \leq 20) = \text{Prob}(-20 \leq M - 500 \leq 20)$

<u>Cherchons la loi de M</u>

Si on note Y_i la variable aléatoire telle que $Y_i = 1$ si $X_i \in [0{,}25 \text{ ; } 0{,}75]$ et $Y_i = 0$ sinon.

Y_i est donc une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \text{Prob}(X_i \in [0{,}25 \text{ ; } 0{,}75])$

Soit $p = \int_{0,25}^{0,75} f(x)\,dx$ où f la densité de la loi $\mathcal{U}([0\text{ ; }1])$; $f(x) = 1$ $\forall x \in [0;1]$

ainsi $p = \int_{0,25}^{0,75} 1\,dx = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5$

d'où $Y_i \sim \mathcal{B}(0{,}5)$

et $M = \sum_{i=1}^{1000} Y_i$ ainsi $M \sim \text{Binomiale}(1000 \text{ ; } 0{,}5)$

comme somme de 1000 v.a. de Bernoulli indépendantes.

$B(1000 \text{ ; } 0{,}5)$ n'étant pas dans la table on peut approximer cette loi par une loi Normale de paramètre $E(M) = np = 1000 \times 0{,}5 = 500$ et $\sigma_M = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \times 0{,}5} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10} \simeq 15{,}81$

après avoir vérifié les <u>conditions</u> à <u>respecter</u>

$M \simeq \mathcal{N}(500 \text{ ; } 15{,}81)$

$\text{Prob}(-20 \leq M - 500 \leq 20) = \text{Prob}\left(\frac{-20}{5\sqrt{10}} \leq \frac{M-500}{5\sqrt{10}} \leq \frac{20}{5\sqrt{10}}\right) = P_r(-1{,}26 \leq \mathcal{N}(0,1) \leq 1{,}26)$

$\frac{M-500}{5\sqrt{10}}$ suivant une loi Normale $N(0,1)$ car c'est une variable centrée réduite

<u>ainsi</u> $\text{Prob}(|M-500| > 20) = 1 - (\Pi(1{,}26) - \Pi(-1{,}26))$
$= 1 - (\Pi(1{,}26) - (1 - \Pi(1{,}26))) = 2 - 2\Pi(1{,}26)$

lu sur la table $= 2 - 2 \times 0{,}89617 = 0{,}20766 \simeq 20{,}8\%$