Examen Janvier 2010, Notes Etudiant en L2

1/ Probabilité pour que la note d'un étudiant pris au hasard soit aumoins egal à 12.

soit X_i la note d'un etudiant "i". X_i est une variable aléatoire : domaine de X_i = $[0 ; 20]$
on cherche $Prob(X_i \geq 12)$, l'étudiant étant choisi au hasard.
or l'événement $\{X_i \geq 12\}$ est egal à $\{X_i \geq 12 \text{ et } i \in \text{Garçon}\}$ ou $\{X_i \geq 12 \text{ et } i \in \text{Fille}\}$ ainsi

$$Pr(X_i \geq 12) = Pr[(X_i \geq 12 \text{ et } i \in \text{Garçon}) \text{ ou } (X_i \geq 12 \text{ et } i \in \text{Fille})]$$
$$= Pr(X_i \geq 12 \text{ et } i \in \text{Garçon}) + Pr(X_i \geq 12 \text{ et } i \in \text{fille})$$

car Garçon $\cap$ Fille $= \emptyset$

$$Pr(X_i \geq 12) = Pr(X_i \geq 12 / i \in \text{Garçon}) \times Pr(i \in \text{Garçon}) + Prob(X_i \geq 12 / i \in \text{Fille}) \times Pr(i \in \text{Fille})$$

on centre et on reduit

$$= Pr\left(\frac{X_i^{(G)} - 8}{5} \geq \frac{12-8}{5}\right) \times 55\% + Prob\left(\frac{X_i^{(F)} - 10}{4} \geq \frac{12-10}{4}\right) \times 45\%$$

$$= Pr\left(N(0,1) \geq \frac{4}{5}\right) \times 0{,}55 + Pr\left(N(0,1) \geq \frac{1}{2}\right) \times 0{,}45$$

$$= 0{,}21 \times 0{,}55 + 0{,}31 \times 0{,}45$$

lus dans la table et indication dans l'énoncé.

$$= 0{,}12 + 0{,}14$$

$$= 0{,}26$$

2. on cherche $Pr(i \in \text{Fille} / X_i \geq 12) = \dfrac{Pr(X_i \geq 12 \cap i \in \text{Fille})}{Pr(X_i \geq 12)} =$

$$= \frac{Pr(X_i \geq 12 / i \in \text{Fille}) \times Pr(i \in \text{Fille})}{Pr(X_i \geq 12)} = \frac{0{,}31 \times 0{,}45}{0{,}26}$$

$$= \frac{0{,}14}{0{,}26} = \frac{7}{13} \approx 0{,}53$$

3. On choisit 10 étudiants au hasard

cherchons Prob(5 d'entre ces 10 aient une <u>mention</u>)

Soit X'_j la note de l'étudiant j parmi les 10 étudiants

Notons Y'_j la v.a.r telque $Y'_j = 1$ si $X'_j \geq 12$

et $Y'_j = 0$ sinon.

Y'_j est une v.a de Bernoulli qui suit $\mathcal{B}(p)$

où $p = \text{Prob}(X'_j \geq 12) = 0{,}26$

soit $T' = \sum_{j=1}^{10} Y'_j$ c'est le nombre aleatoire d'étudiants qui ont la mention. $T'(\Omega) = \{0, 1, 2, .., 10\}$

et T' suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(10; 0{,}26)$ si

on suppose que les Y'_j sont independantes.

ainsi <u>on cherche</u> la $\text{Prob}(T' = 5)$

$$\text{Prob}(T' = 5) = C_{10}^{5}(0{,}26)^5(0{,}74)^5 = C_{10}^{5}[0{,}26 \times 0{,}74]^5$$

$$= \frac{10!}{5!\,5!} \times (0{,}26 \times 0{,}74)^5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}(0{,}19)^5 = 2 \times 9 \times 2 \times 7 \times (0{,}19)^5$$

$$= 0{,}066$$

$$\approx 6{,}6\%$$