2011-2012 sem 2 TD1 exo 10

Un entrepreneur doit estimer le temps nécéssaire à l'execution d'un chantier, Les incertitudes dues au marché du travail, à l'approvisionnement aux conditions atmosphériques, etc,... constituent une inconnue. Néanmoins, il affirme qu'il a une probabilité de 10% de réaliser le travail en plus de 190 jours et de 5% de le réaliser en moins de 50 jours. En supposant que la durée du chantier est une variable aléatoire qui suit une loi normale, calculer la probabilité que la durée du chantier excède 200 jours. Toute la démarche permettant de parvenir au resultat sera développée.

<u>notons</u> D la variable aléatoire reelle egale au nombre de jours que dure le chantier. $E(D) = m$, $V(D) = \sigma^2$

<u>On sait que</u> 1/ D suit une loi normale ; $D \sim N(m, \sigma)$

$D = N(m, \sigma^2)$

2/ $\text{Prob}(D > 190) = 10\%$

3/ $\text{Prob}(D < 50) = 5\%$

<u>On cherche</u> $\text{Prob}(D > 200) = ?$

Si on connait m et σ, il suffit de calculer $Pr(D > 200) = Pr\left(\frac{D-m}{\sigma} > \frac{200-m}{\sigma}\right)$

où $\frac{D-m}{\sigma}$ suit $N(0,1)$ ainsi $Pr(D > 200) = 1 - \text{Prob}\left(N(0,1) \leq \frac{200-m}{\sigma}\right)$

et lire sur la table de la loi normale centrée reduite la probabilité correspondante à $\frac{200-m}{\sigma}$.

<u>or</u> $\text{Prob}(D > 190) = 10\%$ soit $\text{Prob}\left(\frac{D-m}{\sigma} > \frac{190-m}{\sigma}\right) = 0,10$

soit $1 - \text{Prob}\left(N(0,1) \leq \frac{190-m}{\sigma}\right) = 0,10$ soit $\text{Prob}\left(N(0,1) \leq \frac{190-m}{\sigma}\right) = 0,9$

on lit sur la table de $N(0,1)$: $\left\{\begin{array}{l} \text{Prob}(N(0;1) \leq 1,28) = 0,8997 \\ \text{Prob}(N(0;1) \leq 1,29) = 0,9015 \end{array}\right\}$ alors $Pr(N(0;1) \leq 1,2815519) = 0,9$

soit $\frac{190-m}{\sigma} = 1,2815519$ (valeur calculée)

Démarche analogue pour trouver que $Pr(N(0;1) \leq -1,64485348) = 0,05$

puisque $Pr(N(0,1) \leq 1,64485348) = 0,95$ et $Pr(D < 50) = Pr\left(\frac{D-m}{\sigma} < \frac{50-m}{\sigma}\right)$

.../...

et $Pr\left(N(0;1) \leq \frac{50-m}{\sigma} \right) = 0,05$

ainsi $\frac{50-m}{\sigma} = -1,64485368$

d'où le système à deux équations $\begin{cases} \frac{190-m}{\sigma} = 1,2815519 \\ \frac{50-m}{\sigma} = -1,64485348 \end{cases}$

soit le système $\begin{cases} 190-m = 1,2815519\sigma \\ 50-m = -1,64485348\sigma \end{cases} \iff \begin{cases} m + 1,2815519\sigma = 190 \\ m - 1,64485348\sigma = 50 \end{cases}$

après résolution : $\begin{cases} m \simeq 128,69 \\ \sigma \simeq 47,84 \end{cases}$

Par conséquent $\frac{200-m}{\sigma} \simeq \frac{200-128,69}{47,84} = 1,4969$

d'où $Prob\left(N(0;1) \leq 1,4969 \right) \simeq 0,9328$

Ainsi $Prob\left(D > 200 \right) \simeq 1 - 0,9328 \simeq 0,0672 \simeq 6,7\%$

Ce résultat n'est pas incohérent avec $Pr\left(D > 190 \right) = 10\%$

car $Prob\left(D > 200 \right) < Pr\left(D > 190 \right)$