5\. a. $\bar{X}^H = \frac{1}{n} \sum_{i=1} X_i^H$ soit une combinaison linéaire de n variable normales indépendantes, donc $\bar{X}^H$ suit une loi normale.

$$E(\bar{X}^H) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i^H\right) = \frac{1}{n} \cdot n\, E(X_i^H) = E(X^H) = 172$$

$$V(\bar{X}_H) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^H\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n\, V(X^H) = \frac{1}{n}\ 196$$

$$\sigma(\bar{X}^H) = \frac{14}{\sqrt{n}} \quad \text{donc} \quad \bar{X}^H \sim N\left(172, \frac{14}{\sqrt{n}}\right)$$

de la même façon :

$$\bar{X}^F \sim N\left(162, \frac{12}{\sqrt{n}}\right)$$

b.

Les deux variables $\bar{X}^H$ et $\bar{X}^F$ sont indépendantes donc

$$\bar{X}^H - \bar{X}^F \sim N\left(-10, \frac{\sqrt{340}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P(\bar{X}^F > \bar{X}^H) = P\left(\frac{\bar{X}^F - \bar{X}^H + 10}{\frac{\sqrt{340}}{\sqrt{n}}} > \frac{10}{\frac{\sqrt{340}}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\alpha_n = 1 - \Pi\left(\frac{10\sqrt{n}}{\sqrt{340}}\right)$$

or la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est croissante et $\frac{10\sqrt{n}}{\sqrt{340}}$ dépend positivement de n

donc $\Pi\left(\frac{10\sqrt{n}}{340}\right)$ est croissante avec n, donc α_n est décroissante avec la taille n des groupes.