<u>exercice II</u> Soit X v.a tel que $Prob(X=\ell) = \ell e^a$ $\cancel{X} \in [\![1;n]\!]$

où $n \in \mathbb{N}^*$. et a une constante réelle

Nécéssairement $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} Prob(X=\ell) = 1$. (Somme des probabilités sur l'univers)

Par conséquent $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \ell . e^a = 1$

et comme e^a est une constante, on peut la mettre en facteur

ainsi $\displaystyle e^a \sum_{\ell=1}^{n} \ell = 1$ or $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \ell = \frac{n(n+1)}{2}$ somme des n premiers nombres entiers

d'où $e^a \times \dfrac{n(n+1)}{2} = 1$ soit $e^a = \dfrac{2}{n(n+1)}$

En prenant le logarithme népérien de chaque membre de l'égalité et comme le logarithme est une fonction monotone

alors $\ln(e^a) = \ln\left(\dfrac{2}{n(n+1)}\right)$ soit $a \ln(e) = \ln\left(\dfrac{2}{n(n+1)}\right)$

en conclusion $a = \ln(2) - \ln(n(n+1))$.

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

- $\displaystyle E(X^2) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 . Prob(X=\ell) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 . \ell e^a = e^a \sum_{\ell=1}^{n} \ell^3 = e^a \times \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$E(\cancel{X}) = \dfrac{2}{n(n+1)} \times \dfrac{(n(n+1))^2}{4} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- $\displaystyle E(X) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell . Prob(X=\ell) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell . \ell . e^a = e^a \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$

- $Var(X) = \dfrac{n(n+1)}{2} - \left(\dfrac{2n+1}{3}\right)^2 = \dfrac{n^2+n-2}{18}$ après calcul

<u>Cas</u> : $n=1$ $E(X) = 1$ $Var(X) = \dfrac{0}{18} = 0$ c'est normal car $X \in \{1\}$ et $Prob(X=1) = 1$

car $a = 0$

$n=2$ $E(X) = \dfrac{5}{3}$, $Var(X) = \dfrac{2}{9}$, $a = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $e^a = \dfrac{1}{3}$, $X \in \{1;2\}$ et $Prob(X=1) = \dfrac{1}{3}$ $Pr(X=2)$