0.1 LICENCE Sciences Economiques $2^{ième}$ année - Statistiques II

0.2 Année Universitaire 2013 - 2014

Feuille d'exercices n° 1 : Rappels sur les variables aléatoires et les lois de probabilité.

I - On donne une variable aléatoire réelle X par sa loi de probabilité :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{1,2,3,4,5,6\} \text{ et} \\ p(X &= 1) = p(X=3) = p(X=4) = p(X=5) = \frac{2}{10} \\ p(X &= 2) = p(X=6) = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

1. Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$. (On donne $(3,4)^2 = 11,56$).
2. On donne une deuxième variable aléatoire réelle Y telle que $Y(\Omega) = \{3,4,5\}$. Déterminer sa loi de probabilité sachant que :

$$p(Y<5) = \frac{4}{5} \text{ et que } p(Y=3) = 3p(Y=4)$$

3. On suppose que X et Y sont indépendantes. Calculer $p(X+Y=9)$ (on justifiera soigneusement les calculs).

II -On veux définir une variable aléatoire réelle X par :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{1,2,.....,n\} & n \in \mathbb{N}^* \\ prob\,(X=k) = k.a \quad , & k \in X(\Omega) \end{cases}$$

où a est un réel strictement positif.

1. Déterminer a de telle sorte que X soit bien une v.a.r.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ (on rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$).

III - On considère une variable aléatoire réelle X et une fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \frac{x}{8} & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ \frac{x^2}{16} & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$$

1. Vérifier que l'on peut prendre F comme fonction de répartition de la v.a.r. X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

IV - La consommation annuelle d'un ménage ayant un revenu R peut être considérée comme une v.a.r. X ayant pour fonction de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} kx^5 & \text{si } 0 \leq x \leq R \\ & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le réel k. Quelle est la fonction de répartition de X ?
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Calculer la probabilité qu'un ménage consomme plus des neuf dixièmes de son revenu.

V - (Juin 2009) Soit X une variable aléatoire discrète définie par les couples (x_i, p_i) suivants:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4

1. En notant $G_X(t)$ la fonction génératrice des probabilités de la variable aléatoire X, on donne :

$$G_X(t) = \left[\frac{2t+1}{3}\right]^4$$

   (a) En utilisant la définition de la fonction $G_X(t)$, déterminer les valeurs des p_i pour $i = 0, ..., 4$. Calculer $\sum_{i=0}^{4} p_i$.

   (b) En déduire la valeur de $E[X]$, l'espérance mathématique de X.

2. On note $\Psi_X(t)$ la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X.

   (a) Sachant que, par définition, $\Psi_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$ donner l'expression de $\Psi_X(t)$ en fonction de t.

   (b) En utilisant un résultat du cours, déduire de la question précédente la valeur du moment non centré d'ordre 2 de la variable aléatoire X. (On ne demande pas de démontrer le résultat utilisé).

   (c) En déduire la valeur de $Var(X)$, la variance de X.

3. Compte tenu des résultats obtenus aux 2 premières questions, identifier précisément la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

VI - Soit X une variable aléatoire continue suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ tel que $\alpha < \beta$.Etant donné que $E(X) = 1$ et $V(X) = 3$, calculer α et β.

VII - Une urne contient 10 boules d'aspects identiques. 4 de ces boules contiennent à l'intérieur la somme de 50 Euros, 3 des boules contiennent chacunes 100 Euros, 2 des boules contiennent 200 Euros et enfin 1 boule ne contient rien. On tir simultanément 2 boules de l'urne.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, variable aléatoire mesurant le gain du joueur en Euros.

2. Quel doit être le coût de la participation au jeu pour que l'espérance de gain de l'organisateur soit de 20 Euros ?

VIII - 500 personnes ont postulé pour un emploi mais 379 d'entre elles ont été refusées parce qu'elles n'étaient pas assez grandes. La taille d'un individu suivant une loi normale d'espérance 171,5 cm et d'écart-type 5 cm, déterminer la taille minimale exigée pour l'emploi proposé.

IX - Une machine fabrique en grande série des disques en verre dont le diamètre doit être de 30 mm. On admet que la variable aléatoire égale au diamètre d'un disque pris au hasard suit sensiblement une loi normale de moyenne $m = 30$ mm et d'écart-type $\sigma = 0.18$ mm.

1. Calculer la probabilité que le diamètre d'un disque pris au hasard soit compris entre 29,9 mm et 30,1 mm.
2. Comment modifier σ pour que 95 % de la production ait un diamètre compris entre 29,9 mm et 30,1 mm ? La machine est dorénavant réglée ainsi.
3. On prélève un échantillon aléatoire de 25 disques, et on accepte ceux dont le diamètre est compris entre 29,9 mm et 30,1 mm. Quelle est la probabilité qu'au moins 22 disques soient acceptés ?
4. On appelle $\overline{X}_{25}$ la moyenne aléatoire des 25 disques prélevés ($\overline{X}_{25} = \dfrac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i$ où X_i désigne le diamètre du i$^{\text{ème}}$ disque prélevé). Quelle est la loi de $\overline{X}_{25}$ (justifier la réponse) ? Calculer $\Pr(\left|\overline{X}_{25} - 30\right| \geq 0.1)$.

X - Un entrepreneur doit estimer le temps nécessaire à l'éxécution d'un chantier. Les incertitudes dues au marché du travail, à l'approvisionnement, aux conditions atmosphériques, etc ....constituent une inconnue. Néanmoins, il affirme qu'il a une probabilité de 10 % de réaliser le travail en plus de 190 jours et de 5 % de le réaliser en moins de 50 jours. En supposant que la durée du chantier est une variable aléatoire qui suit une loi normale, calculer la probabilité que la durée du chantier excède 200 jours. Toute la démarche permettant de parvenir au résultat sera développée.

XI - Soit X une v.a.r. uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$. Soit Y la v.a.r. définie par $Y = X^2$.

1. Déterminer une fonction de densité de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

XII - Janvier 2014 (Extrait) - La taille d'un épi de blé dans un champ est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance 15 et de variance 36 (unité : le cm).

1. Quelle est la probabilité pour qu'un épi ait une taille inférieure à 16 cm ?
2. On admet qu'il y a environ 15 millions d'épis dans le champ, donner une estimation du nombre d'épis de plus de 20 cm.

3. Quelle est la probabilité pour que 10 épis prélevés dans le champ aient tous leur taille dans l'intervalle $[16; 20]$?

4. On suppose que la taille d'un épi de blé d'un autre champ est modélisée par une variable aléatoire Y suivant une loi normale d'espérance 10, de variance 16 et que X et Y sont des variables indépendantes. Quelle est la probabilité pour qu'un épi pris dans le premier champ soit plus grand qu'un épi pris dans le second ?

XIII - Un P.D.G. a son domicile dans un quartier résidentiel. Il quitte son domicile à 8h 45 pour se rendre à son bureau qui ouvre à 9h. Il utilise pour cela sa voiture de sport (dont le nom commence par un P, finit par un E et comporte 7 lettres). La durée de son trajet, notée P, peut être considérée comme une variable aléatoire gaussienne, d'espérance 12 mn et d'écart-type 3 mn.

Sa nouvelle secrétaire, se rend au même bureau en prenant d'abord le train de 7h 45, puis elle doit marcher 10 mn afin de prendre un autobus à 8h40 qui la dépose devant le bureau. La durée du trajet en train, notée S_1, est une variable aléatoire gaussienne d'espérance 42 mn et d'écart-type 3 mn tandis que celle du trajet en bus, notée S_2, peut être considérée comme une variable gaussienne d'espérance 15 mn et d'écart-type 4 mn.

1. Calculer α, la probabilité que le patron arrive à l'heure. Expliquer soigneusement les calculs effectués.

2. En notant S la durée totale du trajet de la secrétaire, exprimer S en fonction de S_1et S_2.

3. Déterminer complètement la loi suivie par la variable aléatoire S. Justifier votre réponse.

4. Calculer β_1, la probabilité que la secrétaire puisse prendre l'autobus de 8h 40 et β_2, la probabilité que ce dernier arrive au bureau avant 9h. Expliquer vos réponses.

5. Déduire des deux questions précédentes, la probabilité β que la secrétaire arrive à l'heure à son bureau. Justifier votre réponse.

6. Soit γ, la probabilité que le patron constate à 9h que la secrétaire n'est pas encore arrivée. Donner l'expression de γ en fonction de α, β_1 et β_2.

XIV - Une machine calibre des tomates. On estime, à la suite d'études statistiques, que le poids d'une tomate calibrée prise au hasard peut être considéré comme une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 150 g et d'écart-type 10 g.

1. Quelle est la probabilité qu'une tomate pèse plus de 170 g ? Entre 130 et 170 g ?

2. Un meilleur réglage de la machine permet de modifier l'écart-type. Comment faut-il régler la machine pour que la probabilité que le poids d'une tomate prise au hasard soit compris entre 145 g et 155 g, soit de 0,95 ?

3. Ces tomates sont mises dans des caisses de 32 unités. Quel est le poids moyen d'une caisse ?

4. En supposant la machine réglée comme dans 1°), quelle est la probabilité qu'une caisse ait une masse comprise entre 4,6 kg et 5 kg ? (On justifiera soigneusement les calculs. On donne : $\frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3.53$).

XV - Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance mathématique 150 et de variance 36. On cherche un intervalle $[a, b]$ tel que :

$$prob\,\{a \leq X \leq b\} = 0.85$$

1. On sait que parmis l'infinité d'intervalles vérifiant cette propriété, un seul est centré. Quelle est l'autre particularité de cet intervalle centré ?

2. Trouver 2 intervalles $[a, b]$ vérifiant $prob\,\{a \leq X \leq b\} = 0.85$.

XVI - La taille X^H des hommes en France peut être modélisée par une loi normale, d'espérance mathématique égale à 172 cm et d'écart-type égal à 14 cm.

1. Quelle proportion de français a une taille inférieure à 1,6 m ?

2. On prélève un français au hasard; Quelle est la probabilité qu'il mesure plus de 2 m ?

3. Si on classait dix mille français choisis au hasard par ordre taille croissante, quelle serait la taille du 9000-ième ?

4. La taille X^F des françaises peut aussi être modélisée par une loi normale, mais cette fois d'espérance mathématique égale à 162 cm et d'écart-type égal à 12 cm. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard soit plus grande qu'un homme choisi au hasard ? (on donne $\sqrt{340} = 18,4$)

5. On prélève aléatoirement deux groupes de n français, le premier parmis les hommes et le second parmis les femmes. On note respectivement $\bar{X}^H$ et $\bar{X}^F$ les tailles moyennes observées dans les groupes d'hommes et de femmes.

   (a) Déterminer complètement les lois suivies par les variables aléatoires $\bar{X}^H$ et $\bar{X}^F$.

(b) Soit $\alpha_n = prob \quad (\bar{X}^F > \bar{X}^H)$. Evaluer α_n et étudier, en justifiant votre réponse, le sens de variation de α_n en fonction de n.

(c) Calculer α_n lorsque $n = 25$.

(d) Déduire des questions précédentes et sans faire de calcul, la valeur maximale que peut prendre la probabilité α_n.