LICENCE Sciences Economiques 2 ^{ième} année - Statistiques II
Année Universitaire 2013 - 2014

Feuille d'exercices n ° 2 : Convergences Stochastiques.

I - Vérification de la loi faible des Grands Nombres

Le jeu de Pile ou Face suppose que l'occurence de chacune des deux eventualites lors du jet d'une piece est equiprobable. On se propose dans le cadre d'un tel jeu portant sur un nombre important de jets, de "verifier" theoriquement (expression bizarre !) la loi des Grands nombres de Bernoulli.

1) Montrer que l'énoncé même de cette loi implique deux méthodes d'approche (ou type d'événements à observer ou encore, phénomènes à repérer).

2) En déduire qu'une telle vérification passe par le calcul :
   a) pour un intervalle donné, de la probabilité que la fréquence de Pile soit contenue dans cet intervalle, lors de n épreuves,
   b) pour une probabilité donnée, des bornes d'un intervalle de confiance ayant une probabilité donnée de contenir la fréquence de Pile, lors de n épreuves, en donnant à n des valeurs croissantes.
3) Opérer cet ensemble de calculs pour :

- un intervalle pour la fréquence, délimité (bornes incluses) par les valeurs 0,4 et 0,6 **(cas a)**;
- une probabilité donnée de 0,95 (**cas b**);

n valant respectivement 10, 100 et 400.

II - Quel doit être le nombre minimum de lancers de deux dés ordinaires pour que la probabilité que la fréquence de survenance d'un total qui soit un multiple de trois, s'écarte de la valeur attendue de plus de 10% de cette valeur, ne dépasse pas 5% ?

III - Une personne joue 60 fois à "Pile ou Face". Au bout de 30 lancers, elle a obtenu 20 fois Pile.
1) Calculer l'espérance mathématique et la variance du nombre total de Pile obtenu au terme des 60 coups.

2) En déduire une remarque que l'on peut faire à un joueur dont la tactique consiste à parier à chaque coup sur la face contraire à celle sortie au coup précédent, et qui justifie son attitude par le fait qu'en définitive, on doit obtenir autant de fois Pile que Face.

IV - La moyenne des revenus annuels des employés d'une grande banque est égale à 50 000 euros avec un écart-type de 10 000 euros. Donner un majorant de la probabilité qu'un employé gagne plus de 80 000 € par an (utiliser l'inégalité de Bienaymé Tchébychev).

V - Soit X une variable aléatoire telle que $E[X]=3$ et $E[X^2]=13$. Déterminer la borne inférieure de la probabilité α où $\alpha = prob\{-2 < X < 8\}$.

VI - Soit X une variable aléatoire suivant une loi Binomiale de paramètres n et p.

1) Si $n=50$ et $p=0.4$, calculer $prob\{X \leq 25\}$ à l'aide de la table de la loi binomiale. Comparer cette valeur avec celles données par les approximations de Poisson et Normale.
2) Si $n=50$ et $p=0.05$, calculer $prob\{X \leq 5\}$ à l'aide de la table de la loi binomiale. Comparer cette valeur avec celles données par les approximations de Poisson et Normale.

VII - Samuel et Sonia jouent au jeu suivant : chacun lance 100 fois un dé équilibré. Il calcule le produit des nombres obtenus. Sonia a obtenu le score de 4^{100}. Donner une approximation de la probabilité que Samuel gagne.
(Indication : Si X_i désigne le i ^{ème} nombre obtenu par Samuel, il s'agit de calculer $\Pr(\prod_{i=1}^{100} X_i > 4^{100})$. Transformer le produit en somme et utiliser le T.C.L. appliqué aux variables $\ln(X_i)$).

VIII - Une entreprise fabrique des composants électroniques dont une proportion p (p petit) est défectueuse. Pour avoir une idée de cette proportion, on prélève un échantillon de 400 pièces (dans une production beaucoup plus grande) et on compte le nombre de composants défectueux. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses parmi les 400.

1) Quelle est la loi suivie par X (justifiez votre réponse) ? Par quelle loi discrète, et à quelles conditions peut-on l'approcher ? Application numérique : si $p = 3\%$, calculer la probabilité que au moins 12 pièces soient défectueuses.
2) Par quelle loi à densité, et à quelles conditions peut-on approcher la loi de X ? Application numérique : si $p = 6\%$, quelle est la probabilité qu'il y ait moins de 12 pièces défectueuses ?

(on prendra $0.06 \times 0.94 \times 400 \approx 4.75^2$)

3) On prélève effectivement 400 pièces et on constate qu'il y a 12 pièces défectueuses. A l'aide des calculs précédents, diriez-vous que p vaut plutôt 3% ou plutôt 6% ?

IX - On lance 10 000 fois une pièce de monnaie équilibrée.

1) Trouver un intervalle centré en 5000 tel que le nombre de pile obtenu se trouve dans cet intervalle avec une probabilité supérieure ou égale à 0.99.
2) Comparer ce résultat avec celui obtenu par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

X - (Session de Mai 2009 - Extrait)

On lance deux dés ordinaires à 6 faces.

1) Quelle est la probabilité que le résultat obtenu (somme des chiffres obtenus à l'issue du lancer) soit un multiple de 4 ?
2) On lance 36 fois deux dés ordinaires à 6 faces. Notons X_{36} la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'on observe un résultat qui est un multiple de 4 au cours des 36 lancers.
   a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X_{36} ?
   b) Calculer son espérance mathématique $E[X_{36}]$ et sa variance $Var[X_{36}]$.(On donne $\sqrt{3} = 1,7$).
   c) Montrer que X_{36} peut être approximé par une variable aléatoire continue.
   d) En notamt X_n le nombre de fois où l'on observe un résultat qui est un multiple de 4 au cours de n lancers, peut-on dire que X_n converge en probabilité vers un nombre certain a , lorsque n augmente indéfiniment ? Justifier votre réponse.
   e) On donne $\alpha = prob\{X_{36} \in [E[X_{36}]-1; E[X_{36}]+1]\} = 0,4354$. En utilisant l'approximation précédente, calculer une valeur approchée de α sans effectuer la correction de continuité.
   f) Quelle est la marge d'erreur résultant de l'approximation utilisée ?
   g) De quel pourcentage cette marge serait-elle réduite si l'on applique lors du calcul de α la correction de continuité ?

XI - (Session de Mai 2005)
Au second tour d'une élection nationale, un des deux candidats, le candidat A, obtient 6 695 000 voix sur les 13 000 000 de suffrages exprimés.

1) La veille du vote, un institut de sondage annonçait la victoire du candidat B sur la base d'un échantillon représentatif de 100 personnes. Evaluer la probabilité qu'avait cet institut de se tromper. Toute la démarche permettant de parvenir au résultat sera développée.
2) Quelle aurait été cette même probabilité si l'institut avait prélevé un échantillon représentatif de 1600 personnes ?
3) Comment peut-on expliquer ce résultat ?

XII - (Session de Mai 2006)
Dans le service pédiatrique d'un dispensaire, des études sérieuses ont montré que la durée d'une consultation de nourrisson est une variable aléatoire qui suit une loi normale, d'espérance 12 minutes pour un écart type de 4 minutes. (Les parties 1 et 2 sont indépendantes).
Partie 1 : On se propose de simuler les durées de 9 consultations consécutives à l'aide d'une table de nombre au hasard.

1) Exposer rapidement le principe de la méthode de l'anamorphose permettant de réaliser une telle simulation.
2) On fournit l'extrait suivant d'une table de nombres au hasard :

6915 3300 1112 5239 9772 0951 9452 2420 5793

   a) En considérant des groupes de 4 chiffres dans la liste précédente et en utilisant la méthode présentée à la question 1, réaliser la simulation des durées de 9 consultations successives de ce service.
   b) En déduire le temps total nécessaire pour traiter consécutivement ces 9 consultations.

Partie 2 : On considère toujours que la durée aléatoire X d'une consultation suit une loi normale d'espérance 12 minutes et d'écart type égal à 4 minutes.

1) Calculer α_1 , la probabilité que la consultation de 18 nourrissons traités consécutivement par une même personne puisse être réalisée en trois heures d'une matinée de travail ininterrompu.
2) Que peut-on conclure, **sans calcul**, de la probabilité α_2 qu'une personne travaillant 6 heures d'affilée (le double de temps) parvienne à traiter 36 consultations (le double de consultations) ? Justifier votre réponse de façon rigoureuse.
3) Si T est le temps de traitement, quel temps minimum, T_m , devrait-on accorder au traitement des 18 consultations si l'on veut que la probabilité que le travail soit achevé au terme de cette durée soit d'au moins 0,95 ?

4) Deux personnes travaillant au même rythme traitent chacune 15 consultations en parallèle en débutant à la même heure. Quelle est la probabilité, α_3 , que l'une des deux ait terminé au moins 30 minutes avant l'autre ?

5) Sachant que le dispensaire comporte deux médecins travaillant au même rythme et employés tous les matins, cinq fois par semaine pendant 40 semaines d'une année, évaluer le nombre moyen de fois, k , où l'évènement décrit à la question 4 se produira au cours d'une année. Justifier votre réponse.

NB : On donne : $\sqrt{15} \approx 3,9$; $\sqrt{18} \approx 4,2$; $\sqrt{30} \approx 5,5$.