

- 1/ Soit B la variable aléatoire "nombre de billets retirés par un client en une semaine".
domaine de B . $B(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ car le client retire au moins 1 billet et au plus 4 billets d'après l'énoncé..
Loi suivie par B .

i	1	2	3	4	
b_i	1	2	3	4	total
$\text{Prob}(B=b_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2	1
$b_i \times \text{Prob}(B=b_i)$	0,1	0,8	0,9	0,8	$E(B) = 2,6$

$$\text{car } E(B) = \sum_{i=1}^4 b_i \times \text{Prob}(B=b_i) :$$

$$\text{Calculons } \sigma_B = \sqrt{\text{Var}(B)} \quad \text{avec } \text{Var}(B) = \left(\sum_{i=1}^4 b_i^2 \text{Prob}(B=b_i) \right) - (E(B))^2$$

$$\text{car } \text{Var}(B) = E(B^2) \quad \text{avec } E(B^2) = \sum_{i=1}^4 b_i^2 \text{Prob}(B=b_i)$$

i	1	2	3	4	
b_i^2	1	4	9	16	
$b_i^2 \text{Prob}(B=b_i)$	0,1	1,6	2,7	3,2	$E(B^2) = 7,6$

$$\text{ainsi } \text{Var}(B) = 7,6 - (2,6)^2 = 0,84$$

$$\sigma_B = \sqrt{0,84} \approx 0,9165$$

- 2/ on note B_j , $j \in \{1, 2\}$ la variable aléatoire: "nombre de billets retirés par le client n° j "

on note Y la variable aléatoire "la somme totale retirée par deux clients au cours d'une semaine"

$$\text{ainsi } Y = 100.B_1 + 100.B_2 \quad \text{car } B_1 \text{ et } B_2 \text{ sont indépendantes}$$

2 a) Loi de Probabilité de Y.

p2/3

aidons nous du tableau à double entrée suivante qui donne les sommes possibles entre $100B_1$ et $100B_2$

$100B_1 \backslash 100B_2$	0,1	0,4	0,3	0,2
0,1	100 (0,01)	200 (0,04)	300 (0,03)	400 (0,02)
0,4	200 (0,04)	300 (0,16)	400 (0,12)	500 (0,08)
0,3	300 (0,03)	400 (0,12)	500 (0,09)	600 (0,06)
0,2	400 (0,02)	500 (0,08)	600 (0,06)	700 (0,04)

$(P_i \times P_k)$

Ainsi $Y(\Omega) = \{200; 300; 400; 500; 600; 700; 800\}$

Par conséquent

$$\text{Prob}(Y=200) = 0,01$$

$$\text{Prob}(Y=800) = 0,04$$

$$\text{Prob}(Y=300) = 0,04 + 0,04 = 0,08$$

$$\text{Prob}(Y=400) = 0,03 + 0,16 + 0,03 = 0,22 \dots$$

et obtient par la suite la loi de probabilité de Y sera :

y_i	200	300	400	500	600	700	800	Total
$\text{Prob}(Y=y_i)$	0,01	0,08	0,22	0,28	0,25	0,12	0,04	1
$y_i \times \text{Prob}(Y=y_i)$	2	24	88	140	150	84	32	$E(Y) = 520$
y_i^2	40000	90000	160000	250000	360000	490000	640000	
$y_i^2 \times \text{Prob}(Y=y_i)$	400	7200	35200	70000	90000	58800	25600	$E(Y^2) = 287200$

$$\text{Var } Y = E(Y^2) - E(Y)^2 = 287200 - (520)^2 = 16800 \quad \text{donc } \sigma_Y \approx 129,61$$

Autre méthode pour calculer $E(Y)$ et $\text{Var}(Y)$ où $Y = 100B_1 + 100B_2$

$$E(Y) = E(100B_1 + 100B_2) = E(100B_1) + E(100B_2) = 100E(B_1) + 100E(B_2)$$

$$\text{car l'espérance est linéaire} \quad \text{ainsi } E(Y) = 100 \times (2,8 + 2,8) = 520$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(100B_1 + 100B_2) = \text{Var}(100B_1) + \text{Var}(100B_2) \quad \text{car } B_1 \text{ et } B_2 \text{ sont indep.}$$

$$\text{Ainsi } \text{Var } Y = 10000(\text{Var}(B_1) + \text{Var}(B_2)) = 10000(0,84 + 0,84) = 16800$$

3/

on note Z la variable aléatoire "nombre d'utilisateurs de ce distributeur dans un intervalle d'une heure."

On considère que Z suit une loi de Poisson de paramètre 5

a/ $\begin{cases} Z \sim P(5) & E(Z)=5 \text{ et } Var(Z)=5 \text{ (voir cours)} \\ Z(\Omega) = \mathbb{N} \end{cases}$

b/ i/ cherchons $Prob(Z=4) = 0,1755$ lue directement sur la table de la loi de Poisson

ou $Prob(Z=4) = Prob(Z \leq 4) - Prob(Z \leq 3)$
 $= 0,4405 - 0,2650 = 0,1755$

lues sur la table cumulative de $P(5)$

ii/ cherchons $Prob(Z > 7)$

$Prob(Z > 7) = 1 - Prob(Z \leq 7) = 1 - 0,8666$

c/ cherchons la probabilité de l'événement E

où $E =$ "il y a 4 utilisateurs qui retirent de l'argent dans une heure et deux d'entre eux exactement retirent chacun 400 euros"

ainsi $E = "Z=4"$ et "2 exactement retirent chacun 400 €"

d'où $Prob(E) = Prob(2 \text{ exactement retirent chacun } 400 \text{ €} \mid Z=4) \times Prob(Z=4)$

avec $Prob(2 \text{ exactement retirent chacun } 400 \text{ €} \mid Z=4) = C_4^2 \times (0,2)^2 \times (0,8)^2$
 $= \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} (0,2)^2 (0,8)^2$
 $= 6 \times (0,2)^2 = 0,1536$

Pon en résultant $Prob(E) = 0,1536 \times 0,1755 \approx 0,02696$
 $\approx 0,027 \approx 2,7\%$